

Tutorium zur Analysis II, Nr. 5

Themen:

- ✓ ①: Bsp. Kontraktion
- ✓ ②: Fixpunkte mit Banachschem Fixpunktsatz
- ✓ ③: Fixpunktiteration $\rightarrow$ Newtonverfahren
- ✓ ④: implizite Fkt.? im Bsp. $x^2 + y^2 = 1$ $\leftarrow$ def. ein $y = y(x)$
 ist "die" Fkt. $y = \pm \sqrt{1-x^2}$ implizit

Nach
anderes Bsp.:

$$x^2 - \tan(y) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \tan(y) \Leftrightarrow y = \arctan(x^2)$$

explizit

Anderes Bsp.:

$$x^2 + 3xy - 4y^5 \sin x - 1 = 0$$

$\rightarrow$ implizit: $y = y(x) = ?$

- ⑥: Satz 9.4: Lagrange-Multiplikatorensatz
 $\sim$ Extrema mit NBen

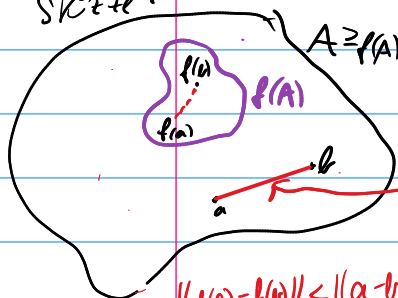
- $\sim$ ⑤: Bsp. zu lokale / globale Umkehrkeit $\rightarrow$ Bsp. $\tan, \dots$

Zu ①: Vor. $f: A \rightarrow A$, Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschr. & abg.

Def.: f heißt Kontraktion: $\Leftrightarrow \exists p \in [0, 1[$:
 $(\text{begl. } \|\cdot\|_{\infty})$

$$\forall a, b \in A: \|f(a) - f(b)\|_{\infty} \leq p \cdot \|a - b\|_{\infty} < \|a - b\|_{\infty}$$

Skizze:



Beobachtung: Begriff ist normabh.

Bsp.: Sei $A = [1, 3] \subseteq \mathbb{R}^1$,

Sei $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{2}{x})$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Beh.: $f: A \rightarrow A$, d.h.: $f(A) \subseteq A$

2. Beh.: $\exists p \in [0, 1[\forall x, y \in A: |f(x) - f(y)| \leq p |x - y|$.

Bew. der 2. Beh.: MWS: $|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f'(c)|}_{\leq p} \cdot |x - y|$, $c \in \overline{xy}$
 für $x, y \in A = [1, 3]$

Haben: $|f'(x)| = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{2}{x^2} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ für alle $x \in \underline{[1, 3]} = A$

Also: $p = \frac{1}{2}$ ist Kontraktionsfaktor ✓

□

- 2 -

Sei $A = [1, 3]$, $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{2}{x})$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Bew. der 1. Beh., d.h. $f(A) \subseteq A$: Wenn $\boxed{1 \leq x \leq 3}$,
dann zeige, dass $1 \leq f(x) \leq 3$.

Dazu:

$$\cdot f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(3 + \frac{2}{1} \right) = \frac{5}{2} \leq 3 \quad \checkmark$$

$$\cdot f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$\frac{5}{6}$ zu groß

Anders: $\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) \geq 1 \quad \checkmark$

$$\Leftrightarrow x + \frac{2}{x} \geq 2 \quad \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \geq 0 \quad \checkmark$$

$\checkmark \quad | \cdot x > 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + 1 \geq 0 \quad \checkmark$$

□

Zu ②: Banachscher Fixpunktsatz: Sei $f: A \rightarrow A$, Kontraktion, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. & beschr.

zu ③

Beh.: a) $\exists!$ Fixpunkt a von f

b) $\left[x_0 \in A, x_{n+1} := f(x_n) \right]$, $R > 0$
Startwert

Fixpunkt-
iteration:

$$x_0, x_1 = f(x_0),$$

$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$$

$$x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0)))$$

$$\|x_n - a\| \leq \frac{p^k}{1-p} \cdot \|x_1 - x_0\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{|p| < 1} 0$$

d.h. $x_n \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a \in A$,
 a ist der
Fixpkt., d.h. $f(a) = a$.

Hier im Bsp.: $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$, $p = \frac{1}{2}$

Fixpunkt it.: z.B. $x_0 = 2 \in [1, 3]$, $x_{n+1} := f(x_n)$

$$\left\| \begin{aligned} x_0 &= 2, & x_1 &= \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{2}{x_0} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = 1.5, \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{2}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(1.5 + \frac{2}{1.5} \right) = \frac{17}{12} = 1.41\bar{6} \\ &\rightarrow 1.4142136\dots = \sqrt{2} \end{aligned} \right.$$

Fixpunkt a von $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$:

$$\begin{aligned} a &= f(a) = \frac{1}{2}(a + \frac{2}{a}) \quad (\Rightarrow) 2a = a + \frac{2}{a} \\ &\quad (\Rightarrow) a = \frac{2}{a} \quad (\Rightarrow) a^2 = 2 \\ &\quad (\Rightarrow) a = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Da $f: [1, 3] \rightarrow [1, 3]$, ist $a = \sqrt{2}$ der Fixpkt.

Newton-verfahren: ges. Nullst. von $g(x) = x^2 - 2$, $g: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$
Nullst. von g ist Fixpunkt von $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ $\stackrel{=}{=} A$

Newtonverf.: $x_0 \in [1, 3]$ geeignet, $x_{n+1} := x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$

$$\text{Hier: } x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}) = f(x_n)$$

Bem.: Bsp. für Kontraktionen mit $m=2$ sind auf Bl. 6, A3

Bsp.: A4, Bl. 6: Bsp. mit $m=1$ für Fixpunktiteration

Zu (5): lok./globale Umkehrbarkeit:

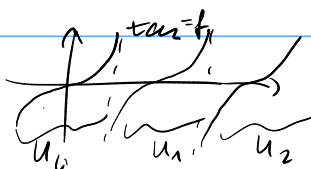
vor.: $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal umkehrbar auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$, f st. abb.,
i.h. $\forall x_0 \in U$: f lokal " in x_0 , (falls $Df(x_0)$ inv'bar).

lok. u. d.h. $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in U$, d.h. für x nahe x_0 .

Def.: Die für ein $U_0 \subseteq U$, $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, gebildete Umkehrfkt.

$g: f(U_0) \rightarrow U_0$ heißt Zweig von f^{-1} auf $f(U_0)$.

Bsp.:

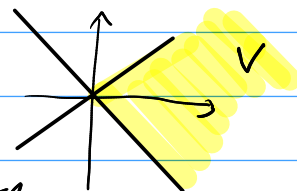


also: $g_k(y) = \arctan(y) + k\pi$

$$g_k: f(U_k) \rightarrow U_k :=]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$$

sind Zweige von $f^{-1} = \arctan$

Bsp.: $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$



Aufgabe: Finden Sie 4 Zweige G_1, G_2, G_3, G_4 von F^{-1} auf $V := \left\{ \begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}; \underbrace{m+v}_{v > -m} > 0, \underbrace{m-v}_{v < m} > 0 \right\}$

$F|_V: V \rightarrow \mathbb{R}^2$

Beh.: Die Funktion $G_i: V \rightarrow \mathbb{R}^2, 1 \leq i \leq 4,$

$G_1\begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{m+v} \\ \sqrt{m-v} \end{pmatrix}^T$

$G_2\begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{m+v} \\ \sqrt{m-v} \end{pmatrix}^T$

$G_3\begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{m+v} \\ -\sqrt{m-v} \end{pmatrix}^T$

$G_4\begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{m+v} \\ -\sqrt{m-v} \end{pmatrix}^T$

sind Zweige von F^{-1} auf V .

$F(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$

Plausibel: z.B. ist $F \circ G_1\begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{m+v} \\ \sqrt{m-v} \end{pmatrix}^T\right)$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\sqrt{m+v})^2 + (\sqrt{m-v})^2 & (\sqrt{m+v})^2 - (\sqrt{m-v})^2 \end{pmatrix}^T$

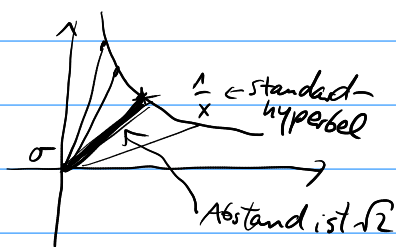
$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m+v + m-v & m+v - (m-v) \end{pmatrix}^T$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2m & 2v \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} \checkmark$

ebenso $F \circ G_2, F \circ G_3, F \circ G_4$

Zu (6): Welchen Abstand hat die Hyperbel $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$ zum Ursprung $o \in \mathbb{R}^2$? Beh.: ist = 5.

Sei $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \underbrace{x^2 + 8xy + 7y^2 - 225}_{f(x,y)} = 0\}$



Gesucht: Minimum der fkt. $g(x,y) = x^2 + y^2$

unter der NB $(x,y) \in H \Leftrightarrow f(x,y) = 0$!

Hyperbel $g|_H \rightarrow$ Nebenbed. $g|_H$.

$\leadsto a = (x,y), a \in \mathbb{R}^2$ zu best. mit $\boxed{\text{grad } g(a) = \lambda \text{ grad } f(a)}$

- 5 -

Hier: $g(x,y) = x^2 + y^2$
 $f(x,y) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225$

$$\text{grad } g(a) = \lambda \text{ grad } f(a)$$

$$\Leftrightarrow (D_1 g(a), D_2 g(a)) = \lambda (D_1 f(a), D_2 f(a)), \quad a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (2x, 2y) = \lambda (2x + 8y, 8x + 14y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 8y)\lambda = 2x \\ (8x + 14y)\lambda = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)x + 4\lambda y = 0 \\ 4\lambda x + (7\lambda - 1)y = 0 \end{cases}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
in x, y

gesucht: nicht triv. Lsg. in (x,y) !

Koeff. matrix ist $\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 4\lambda \\ 4\lambda & 7\lambda - 1 \end{pmatrix}$

$$\text{also } \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 4\lambda \\ 4\lambda & 7\lambda - 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(7\lambda - 1) - 16\lambda^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{9}, \lambda_2 = -1$$

1. Fall: $\lambda = -1$: $\xrightarrow{\text{LGS:}} \begin{cases} -2x - 8y = 2x \\ -8x - 14y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{2y = -x}$

$\xrightarrow{\text{NB}} x^2 - 4x^2 + \frac{16}{4}x^2 = 225$
unlösbar $\Leftrightarrow -\frac{5}{4}x^2 = 225$

2. Fall: $\lambda = \frac{1}{9}$: $\leadsto 2x + 8y = 18x \rightarrow \boxed{2x = y}$

also (NB): $x^2 + 16x^2 + 7 \cdot 4x^2 = 225 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{5}$

$\leadsto y_{1/2} = \pm 2\sqrt{5}$ passend

Ergebnis:

Die Punkte: $a_1 = (\sqrt{5}, 2\sqrt{5}), a_2 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) \in H$,

haben den kürzesten Abst. zu σ ,

haben $g(a_1) = g(a_2) = (\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 5 + 4 \cdot 5 = 25$

Gesuchter Abstand ist also $\sqrt{g(a_1)} = \sqrt{g(a_2)} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$.