Tutorium zur Analysis II, Nr. 6

Themen:

(1) Lagrange-Multiplikatoren: Extrema mit NBen

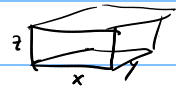
(2) allg. impl. Fkt.satz + Bsp.

(3) Einsetzen von y? Anhand Bsp. der Vorl.

(4) Bsp. UMF

Zu (1):

Bsp.: Welcher Quader vom Volumen $V \overset{!}{=} xyz \iff f(x,y,z) = 0$ hat maximale Oberfläche?

$\frac{1}{2}$ · Oberfläche des Quaders: $g(x,y,z) = xy + xz + yz = f_1(x,y,z)$ 

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Haben 1 NB: $f(x,y,z) = xyz - V \rightsquigarrow f_2(x,y,z) = xyz - V$

Lagrange-Ansatz: $\operatorname{grad} g(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} f(x,y,z)$

Notation der Vorlesung: $f_1 = g$, $f_2 = f$,

$$N := f_2^{-1}(0) = f^{-1}(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ xyz = V\}$$

Laut Satz: Vor: $f_{1|N}$ hat lok. Extremum in einem $a \in N$

Beh.: $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 & D_3 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 & D_3 f_2 \end{pmatrix}(a) \underset{!}{<} 2 \rightsquigarrow a$ berechnen

Hier: $\operatorname{rg}\begin{array}{ccc} \text{nach } x & \text{nach } y & \text{nach } z \\ \end{array}$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} y+z & x+z & x+y \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \overset{!}{=} 1$$

1. Zeile ist $= \operatorname{grad} f_1 = \operatorname{grad} g$

2. Zeile ist $\operatorname{grad} f_2 = \operatorname{grad} f$

Erinnerung an Lin. Alg.: rg A = max. Anz. lin. unabh. Zeilen von A

Hier: rg(") = 1 $\Rightarrow$ 1. Zeile = λ · 2. Zeile für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Lagrange-Ansatz: $\iff \operatorname{grad} g(x,y,z) = \lambda \cdot \operatorname{grad} f(x,y,z)$

Hier: $(y+z,\ x+z,\ x+y) = \lambda \cdot (yz,\ xz,\ xy)$

Wollen Lösen: Glg. system
$$\left\{\begin{array}{l} y+z = \lambda yz \\ x+z = \lambda xz \\ x+y = \lambda xy \end{array}\right\} \begin{array}{l} \cdot x \\ \cdot y \\ \cdot z \end{array} \quad \text{wollen } (x,y,z) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda xyz = xy + xz \\ \lambda xyz = xy + yz \\ \lambda xyz = xz + yz \end{array}\right\} \rightsquigarrow xz = yz \overset{z\neq 0}{\Longrightarrow} x = y$$

$$\overset{III}{\rightsquigarrow} \lambda x^2 z = 2xz \overset{:xz\neq 0}{\Longrightarrow} \lambda x = 2 = \lambda y$$

in Glg. II: $\lambda x^2 z = x^2 + xz$
$$\Rightarrow z(\lambda x^2 - x) = x^2$$
$$\overset{:x}{\Rightarrow} z(\underbrace{\lambda x}_{2} - 1) = x \Rightarrow x = z = y.$$

Also: notwendig $x = y = z$,

d.h. wenn Würfel vorliegt! $\overset{NB}{\rightsquigarrow} x^3 = V \rightsquigarrow x = y = z = \sqrt[3]{V}$.

(dann maximale Oberfläche) $\left(\rightarrow \lambda = \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt[3]{V}}\right)$

Andere Bsp.: Extrema $g = g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2x + 3y + 2z = f_1(x,y,z)$ auf $E \cap Z = N$, Kreis vom Radius $\sqrt{2}$

Ebene $E = \{(x,y,z);\ \underbrace{x + z = 1}_{\text{Ebenenglg.}}\}$, Zylinder $Z = \{(x,y,z);\ x^2 + y^2 = 2\}$. $\subseteq \mathbb{R}^3$

2 NBen: $f_2(x,y,z) = x + z - 1$, $\quad \underset{\nwarrow\, \ell = 3}{f_3}(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2$

Lagrange-Ansatz: $rg(\ldots) < 3$, also $rg(\ldots) \overset{!}{=} 2$.

$$\begin{pmatrix} Df_1 \\ Df_2 \\ Df_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Zeilen sind lin. abh.,}$$

mit $(2, 3, 2) = \color{red}{\lambda_1}\cdot(1, 0, 1) + \color{red}{\lambda_2}\cdot(2x, 2y, 0)$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

$$\rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l} 2 = \lambda_1 + 2x\lambda_2 \\ 3 = 2\lambda_2 y \\ 2 = \lambda_1 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{ll} 2 = 2 + 2x\lambda_2 \rightarrow 0 = 2x\lambda_2 \Rightarrow x = 0 & \\ \lambda_2 = \frac{3}{2y},\ y \neq 0 & \\ \lambda_1 = 2 & y, z \text{ bel., aber mit NB!} \end{array}\right.$$

Die Punkte mit $x=0$ auf $E \cap Z$ sind die mit $y = \pm\sqrt{2}$, $z = 1 - x = 1$

Erg.: in $(0, \sqrt{2}, 1)$ hat g_1 das Max. $3\sqrt{2} + 2$ auf $E \cap Z$
in $(0, -\sqrt{2}, 1)$ " g_1 " Min $-3\sqrt{2} + 2$ auf $E \cap Z$.

Zu (2):
bzw. Zu (3)

$(x,y) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^{l+k}$

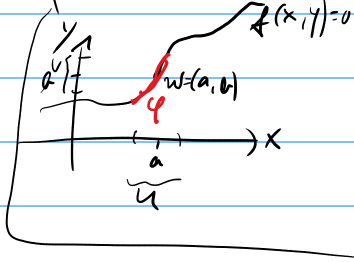
Impl. Fkt.satz: $l, k \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{l+k}$, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^k)$

$[f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)]$

Vor.: $w \in D$, $f(w) = 0$, $\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(w)\right) \neq 0$,
$w = (a, b) \in \mathbb{R}^{l \times k}$.

Beh.: $\exists\, U, V$, $w \in U \times V$ (d.h. U ist Umg. von a, V " " " b),
$(U \subset \mathbb{R}^l, V \subset \mathbb{R}^k)$ $\varphi : U \to V$, $x \mapsto y \in V$ mit $f(x,y) = 0$
ist eine Fkt., und zwar $\varphi \in C^1(U, V)$.

$\varphi(x) = y \Leftrightarrow f(x,y) = 0$
$x \overset{\varphi}{\mapsto} y \Leftrightarrow f(x,y) = 0$

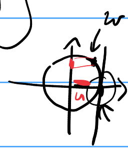


Die Abl. von $\varphi'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$
(alle x nahe w, d.h. $x \in U$)

$y = \varphi(x)$, $y = \varphi(x)$

Bsp.: $k = l = 1$, $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ $\quad [f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1]$

$w = (1, 0) = (a, b)$



Brauchen Vor. $\det\left(\frac{\partial}{\partial y} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq 0$, haben aber
$\frac{\partial}{\partial y} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2y$, also $\det(\,"\,) = 0$
$\to$ Satz greift nicht in $w = (1,0)$!

Besser: $w = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nehmen.

Vor.:
$$\det\left(\frac{\partial}{\partial y} f\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \neq 0 \quad \to \text{Satz greift!}$$

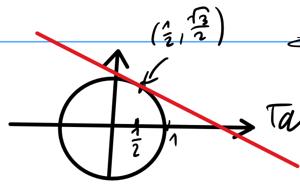
Also liefert der Satz: es gibt $U, V \subset \mathbb{R}$, $a = \frac{1}{2} \in U$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2} \in V$,
sodass $\varphi : x \mapsto y$ mit $f(x,y) = 0$ eine eind. best. Abb. ist für alle $x \in U$.

Laut Satz ist die Abl. für alle $x \in U$:

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{\partial}{\partial y} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -(2y)^{-1} \cdot 2x = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\varphi(x)}$$

$y = \varphi(x)$

speziell:
$\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi'(a) = -\frac{a}{b} = -\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$



Tangente hat Steigung $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bsp. für impl. Fkt.satz: $\ell = 1,\ k = 2$

$f : \mathbb{R}^{1+2} \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x, u, v) = 0$

ex. $u = u(x)$, $v = v(x)$?

Konkret: Gibt es u, v, $0 \in U \subseteq \mathbb{R}$, $u, v : U \to \mathbb{R}$ stetig db,

$u(0) = v(0) = 0$ und $\begin{cases} u^2 + vx + \sin(v) = 0 \\ e^x uv + e^u - 1 = 0 \end{cases}$

$u = u(x)$, $v = v(x)$?

Antwort: Ja, und $u'(0) = 0$, $v'(0) = 0$.

Bew.: Sei $f(\underset{\uparrow}{x}, \underbrace{u, v}_{y \text{ im Satz}}) := \begin{pmatrix} u^2 + vx + \sin(v) \\ e^x uv + e^u - 1 \end{pmatrix}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Haben: $f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,u,v) = \frac{\partial f}{\partial (u,v)}(x,u,v) = \begin{array}{cc} f \text{ nach } u & f \text{ nach } v \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} 2u & x + \cos(v) \\ e^x v + e^u & e^x u \end{pmatrix} \hat{=} \begin{array}{cc} \text{nach } u & \text{nach } v \\ \downarrow & \downarrow \end{array}\begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{pmatrix}$$

Haben: $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ inv'bar ✓

nach Satz ex. u, v nahe $x = 0$

als Komponenten von $\varphi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$ ✓

Deren Ableitungen:

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz}}{=} - \left(\frac{\partial f}{\partial (u,v)} \begin{pmatrix} x \\ u \\ v \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

insb.: $\varphi'(0) = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

benötige $\frac{\partial f}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ uve^x \end{pmatrix}$, also $\frac{\partial f}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ergebnis: $u'(0) = 0 = v'(0)$.

$$z = z(x,y)$$

Bsp.: $\ell = 2,\ k = 1$ $\qquad f(x,y,z) = 0 \iff z = \varphi(x,y)$

$$f : \mathbb{R}^{2+1} \to \mathbb{R}^1$$

Bsp.: $f(x,y,z) = xy + xz\ln(yz) - 1$

$\rightsquigarrow$ Glg. $xy + xz\ln(yz) = 1$ nach z auflösen!

Frage: ex. z als Fkt. $z = \varphi(x,y)$ für (x,y) nahe $(\underbrace{1,1}_{a},\underbrace{1}_{b}) = w$?

1.) $\frac{\partial f}{\partial z}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ist inv'bar ✓ $\to$ Ja, z ex. ✓

2.) $$z'(x,y) = \underbrace{\varphi'(x,y)}_{\frac{\partial}{\partial(x,y)}\varphi(x,y)} = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z'(1,1) = (-1,-2)$$

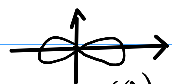
Bew.: haben $\frac{\partial f}{\partial z}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\ln(yz) + x$, $\quad \frac{\partial f}{\partial z}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0 \rightsquigarrow$ 1.) ✓

und $\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \Big(\underbrace{y + z\ln(yz)}_{\frac{\partial f}{\partial x} \text{ bzw. } D_1},\ \underbrace{x + \frac{xz}{yz}\cdot z}_{\frac{\partial f}{\partial y} \text{ bzw. } D_2}\Big)$, $\quad \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = (1,2)$

$$\Rightarrow \varphi'(x,y) = -1^{-1}\cdot(1,2) = (-1,-2). \rightsquigarrow \text{2.) ✓}$$

Zu (4): • Jede Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ ist UMF im $\mathbb{R}^n$, auch jeder Schnitt von beliebig vielen Hyperebenen im $\mathbb{R}^n$ ist eine UMF.

• Keine UMF ist z.B. $M = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ x^4 - x^2 + y^2 = 0\right\}$ "Lemniskate"

mit Schaubild: 

$\rightsquigarrow$ Selbstdurchdringung der Kurve in $0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$! Keine UMF, denn:

In jeder kleinen Umgebung von 0 sieht die Kurve $\approx$ so aus wie ein Achsenkreuz, nicht wie eine "Ebene", hier Strecke.