

Tutorium zur Analysis II, Nr. 7

Themen:

- ① Wdh. abg. / offene Menge $\rightarrow$ Topologie
- ② Nachweis Metrik?

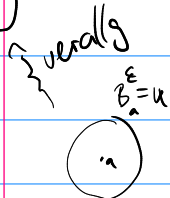
Kontext: im metrischen Raum (R, δ)

(z.B. $\mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \delta)$, ...)
 bel. Menge $\hookleftarrow$ Metrik darauf
 wo $\delta(x, y) = \|x - y\|_{\sup} \dots$

Eine offene Menge in R ist
 eine Teilmenge $U \subseteq R$ mit : $\forall a \in U \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{B_a^\varepsilon}_{\varepsilon\text{-Umgebung}} \subseteq U$
 (laut Def. 11.6) $\boxed{(\Leftrightarrow)}$ $\forall a \in U \exists \underbrace{V \in \mathcal{V}_a}_{\varepsilon\text{-Umgebung}} : \underbrace{V}_{\uparrow} \subseteq U$



Haben $\mathcal{V}_a := \{U \subseteq R; \exists \varepsilon > 0 : B_a^\varepsilon \subseteq U\}$,
 die Menge aller Umgebungen von a . $\leftarrow$ "kleine Form"



$\tilde{\mathcal{V}}_a := \{U \subseteq R; \exists \varepsilon > 0 : U = B_a^\varepsilon\}$
 die Menge aller ε -Umgebungen von a . $\leftarrow$ bestimmte "Form"

wo $B_a^\varepsilon = \{x \in R; \delta(x, a) < \varepsilon\}$.

Beispiele:

	$R_1 = (\mathbb{R}, \underbrace{ \cdot }_{\delta_1})$	$R_2 = (\mathbb{R}^2, \underbrace{\ \cdot\ _2}_{\delta_2})$
Bsp. für ε -Umg. von a :	$a = \pi, \varepsilon = 0.1$ $B_a^\varepsilon = B_\pi^{0.1} =$ $\{x; \pi - x < 0.1\}$ $=]\pi - 0.1, \pi + 0.1[$ $\uparrow$ offener IV	$a = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon = 0.1$ $B_a^{0.1} = \{x \in \mathbb{R}^2; \underbrace{\ \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} - x\ _2}_{\uparrow \uparrow} < \underbrace{0.1}_{\uparrow}\}$ $= \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2;$ $(\pi - \xi_1)^2 + \xi_2^2 < 0.1^2\}$ offener Kreis



$\mathbb{R} \setminus M$ Komplement von M

Def.: $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen : $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus M$ offen

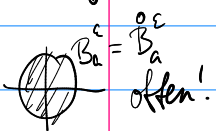
Beispiele:	$\mathbb{R}_1 = (\mathbb{R}, \cdot)$ δ_1	$\mathbb{R}_2 = (\mathbb{R}^2, \ \cdot\ _2)$ δ_2
Bsp. für abg. Mengen:	$]-\infty, 0]$ abg., denn $\mathbb{R} \setminus]-\infty, 0] =]0, \infty[$, (haben $0 \notin]0, \infty[$), und $]0, \infty[$ offen, d.h. $\forall a \in]0, \infty[\exists B_a^\varepsilon: B_a^\varepsilon \subseteq]0, \infty[$	$a = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \varepsilon = 0.1$ $\mathbb{R}^2 \setminus B_a^\varepsilon = \mathbb{R}^2 \setminus B_{\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}}^{0.1}$ ist abg., da B_a^ε offen (enthält alle Randpunkte!)

Bew.: Sei $a > 0$, dann $\varepsilon := \frac{a}{3} > 0$ angeg., dafür gilt: $B_a^\varepsilon = B_a^{\frac{a}{3}} \subseteq]0, \infty[$

[d.h. $\neg (\exists a \in]0, \infty[\wedge \forall B_a^\varepsilon: B_a^\varepsilon \not\subseteq]0, \infty[)$]

$]a - \frac{a}{3}, a + \frac{a}{3}[$
 $=]\frac{2}{3}a, \frac{4}{3}a[$

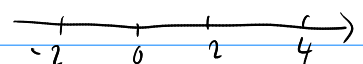
enthält keine Randpunkte!



$\mathbb{R}^2 \setminus B_a^\varepsilon = \mathbb{R}^2 \setminus \{x \in \mathbb{R}^2: |x-a| < \varepsilon\}$ abg.
 $= \{x \in \mathbb{R}^2: |x-a| \geq \varepsilon\} \leftarrow$ Randpunkte dabei!

Beispiele:	$\mathbb{R}_1 = (\mathbb{R}, \cdot)$ δ_1	$\mathbb{R}_2 = (\mathbb{R}^2, \ \cdot\ _2)$ δ_2
Teilmenge, die weder offen noch abg.:	$]0, 1]$ nicht offen, und nicht abg., weil: $\mathbb{R} \setminus]0, 1]$ $=]-\infty, 0] \cup]1, \infty[$ nicht offen	$]0, 1] \times]0, 1] = M$ $M \not\ni (0, 1) \rightarrow$ $(1, 0) \notin M$

Bsp. $M = 2\mathbb{Z} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \{2z\} \subseteq \mathbb{R}$ nicht offen,
 M ist abg., da $\mathbb{R} \setminus M = \mathbb{R} \setminus 2\mathbb{Z} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}}]2z, 2(z+1)[$ offen
 $\stackrel{\text{abg.}}{=} \text{offen}$
 $2(z+1) = 2z+2$



-3-

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, d)$ metr. Raum

Def.:

$$\dot{M} = \{a \in \mathbb{R}; a \text{ H.P. von } M\}$$

$$= \{a \in \mathbb{R}; \forall \varepsilon > 0: (B_a^\varepsilon \setminus \{a\}) \cap M \neq \emptyset\}$$

H.P. von M

Jede ε -Umg. enthält Punkte $\neq a$, die in M liegen.



$$\overset{\circ}{M} = \{a \in \mathbb{R}; a \text{ innerer Pkt. von } M\}$$

$$= \{a \in \mathbb{R}; \exists \varepsilon > 0: B_a^\varepsilon \subseteq M\} \subseteq M$$

Innerer von M



$$\bar{M} = \{a \in \mathbb{R}; a \text{ Berührungspkt. von } M\}$$

$$= \{a \in \mathbb{R}; \forall \varepsilon > 0: \underbrace{B_a^\varepsilon \cap M}_{\neq \emptyset} \neq \emptyset\}$$

Abschluss von M

$0 \in [0, 1[= M$,
aber $0 \notin \dot{M}$

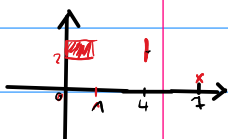
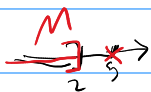
Frage: $\dot{M} \subseteq M$? Ja

$M \subseteq \bar{M}$? Ja

$\dot{M} \subseteq \bar{M}$? Ja

Bsp.:

$\mathbb{R}$	$M \subseteq \mathbb{R}$	$\dot{M}$	$\bar{M}$	$\overset{\circ}{M}$
$\mathbb{R}$	$M = [3, 4[$	$\dot{M} = [3, 4]$	$\bar{M} = [3, 4]$	$\overset{\circ}{M} =]3, 4[$
$\mathbb{R}$	$M =]-\infty, 2[\cup \{5\}$	$\dot{M} =]-\infty, 2]$	$\bar{M} =]-\infty, 2] \cup \{5\}$	$\overset{\circ}{M} =]-\infty, 2[$
$\mathbb{R}^2$	$M = [0, 1[\times]2, 3[$ $\cup \{4\} \times]2, 3[$ $\cup \{(7, 1.6)\}$	$\dot{M} = [0, 1] \times]2, 3[$ $\cup \{4\} \times]2, 3[$	$\bar{M} = \dot{M} \cup \{(7, 1.6)\}$	$\overset{\circ}{M} =]0, 1[\times]2, 3[$ $\cup \{4\} \times]2, 3[$



$\bar{M} = \dot{M} \cup M$ Ja, 11.28 im Skript

$\bar{M} \subseteq \dot{M} \cup M$: wahr, denn ...

$\bar{M} \supseteq \dot{M} \cup M$: wahr, denn ...

Zu (2): Nachweis metrischer Raum?

geg. Menge $\mathbb{R}$, Abb. $\delta: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

$(\mathbb{R}, \delta)$ metr. Raum $(\Rightarrow)$ (M1) $\delta(x, y) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$
 $\wedge$ (M2) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$, (Symmetrie) für alle $x, y \in \mathbb{R}$
 $\wedge$ (M3) $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$, (Δ -Ungl.) für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$

Bsp.: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $f: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|+1}, & x \in \mathbb{R} \\ +1, & x = \infty \\ -1, & x = -\infty \end{cases}$

Beh.: $\delta(x, y) := |f(x) - f(y)|$ ist eine Metrik
 $\Rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \delta)$ metr. Raum.

Bew.: Nachweis von (M1), (M2), (M3). □

Beh.: $\overline{M} = \dot{M} \cup M$

Bew.: „ $\subseteq$ “: Sei $a \in \overline{M}$, d.h. $\forall \varepsilon > 0: \underline{B}_a^\varepsilon \cap M \neq \emptyset$.

1. Fall: $a \in M$ ✓

2. Fall: $a \notin M$, dann z.z. $a \in \dot{M}$, d.h. $\forall \varepsilon > 0: (\underline{B}_a^\varepsilon \setminus \{a\}) \cap M \neq \emptyset$.

Nach vor. ist $a \in \overline{M}$, d.h. $\forall \varepsilon > 0: \underline{B}_a^\varepsilon \cap M \neq \emptyset$

Mit $b \in \underline{B}_a^\varepsilon \cap M$ ist $b \neq a$, also $\forall \varepsilon > 0: \underline{B}_a^\varepsilon \setminus \{a\} \cap M \neq \emptyset \Rightarrow a \in \dot{M}$.

„ $\supseteq$ “: $\dot{M} \subseteq \overline{M}$, $M \subseteq \overline{M} \Rightarrow \dot{M} \cup M \subseteq \overline{M}$. □