Tutorium zur Analysis II, Nr. 8

Themen:

✓ ① Rand ∂M einer Menge $M \subseteq R$
✓ ② zu $\tilde{\text{Ü}}$: Beweisaufgaben besprechen.
✓ ③ Bsp. zu Kp. Mengen → Begriff "Kompakt"
✓ ④ Bsp. für Metrik

Zu ①: Randmenge von einer Menge M, $M \subseteq R$, R metr. Raum:

⊛ $$\boxed{\partial M = \overline{M} \cap \overline{\complement M}}$$

$\complement M := R \setminus M$ heißt Komplement von M

$$a \in \partial M :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: B_a^\varepsilon \cap M \neq \emptyset \neq B_a^\varepsilon \cap \complement M$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: B_a^\varepsilon \cap M \neq \emptyset \wedge B_a^\varepsilon \cap \complement M \neq \emptyset$$

Wir nennen a einen Randpkt. von M.

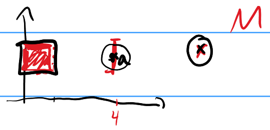
$$\partial M := \{ a \in R;\ a \text{ Randpkt. von } M \}$$

Bsp.: • $M = [3,4[\ \subseteq \mathbb{R}^1 = R \Rightarrow \partial M \overset{⊛}{=} \overline{M} \cap \overline{\complement M}$

$\searrow \complement M =]-\infty, 3[\cup [4, \infty[$

$$= [3,4] \cap (]-\infty,3] \cup [4,\infty[) = \{3,4\}$$

• $M = [0,1[\times]2,3] \cup \underline{\{4\} \times]2,3]} \cup \{(7,1.6)\} \subseteq \mathbb{R}^2 = R$



$$\Rightarrow \partial M = \{(0,y);\ y \in [2,3]\}$$
$$\cup \{(1,y);\ y \in [2,3]\}$$
$$\cup \{(x,2);\ x \in [0,1]\}$$
$$\cup \{(x,3);\ x \in [0,1]\}$$
$$\cup \{(4,y);\ y \in [2,3]\} \leftarrow$$
$$\cup \{(7,1.6)\}$$

$$= \{(x,y);\ x \in \{0,1\},\ y \in [2,3]\} \cup \{(x,y);\ x \in [0,1],\ y \in \{2,3\}\}$$
$$\cup \{4\} \times [2,3] \cup \{(7,1.6)\}$$

- $M = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} = R$

$$\partial M \overset{\circledast}{=} \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$\overline{M} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$: in jeder ε-Umg. um ein bel. $a \in \mathbb{R}$ ex. stets El. aus $\mathbb{Q}$ und El. aus $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$$\mathring{M} = \emptyset$$

innere Punkte, d.h. a ist inn. Pkt. von $\mathbb{Q}$, falls $\exists \varepsilon > 0: \underbrace{B_a^\varepsilon}_{=\{x \in \mathbb{R};\, |x-a| < \varepsilon\}} \subseteq \mathbb{Q}$

$$\dot{M} = \mathbb{R}$$

$$\left[\mathbb{R} = \overline{M} = M \cup \dot{M} = \mathbb{Q} \cup \dot{M} \Rightarrow \dot{M} = \mathbb{R}\right]$$

- $M = \complement\mathbb{Q} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} = R$

haben: $\partial M = \partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \overset{\partial \complement M = \partial M}{=} \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

$$\mathring{M} = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\circ = \emptyset$$

Zu ②: Aufgabe: Zeigen Sie:

In einem metrischen Raum sind die Teilmengen, die offen und abgeschlossen sind, genau diejenigen, deren Randmenge leer ist.
(A $\Leftrightarrow$ B)

Vor.: R sei metr. Raum, sei $M \subseteq R$.

Beh.: $\underbrace{M \text{ offen und } M \text{ abg.}}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{\partial M = \emptyset}_{B}$.

Bew.: Bem.: M offen $\Leftrightarrow M = \mathring{M}$
M abg. $\Leftrightarrow M = \overline{M}$.

„$\Rightarrow$": A gelte, d.h. M sei offen und abg., d.h. $M = \mathring{M} = \overline{M}$.

Dann ist $\partial M \underset{\circledast}{=} \overline{M} \cap \overline{\complement M} \underset{M \text{ abg.}}{=} M \cap \overline{\complement M} \underset{\substack{M \text{ offen} \\ \Rightarrow \complement M \text{ abg.}}}{=} M \cap \complement M = M \cap (R\setminus M) = \emptyset$.

Alternativ z.B.:

Hatten: 11.3.1. $\underline{\overline{M} = \mathring{M} \dot\cup \partial M}$, also $\overline{M} = \underset{\overline{M}}{\mathring{M}} \dot\cup \partial M = \overline{M} \dot\cup \partial M$

$\Rightarrow \partial M = \emptyset$. ✓

„$\Leftarrow$": B gelte, d.h. sei $\partial M = \emptyset$. Z.z.: M offen und abg., d.h. $\mathring{M} = M = \overline{M}$.

Haben $\overline{M} = \mathring{M} \dot\cup \partial M = \mathring{M} \dot\cup \emptyset = \mathring{M}$,

da $\mathring{M} \subseteq M \subseteq \overline{M}$ folgt $\underset{\text{offen}}{\mathring{M}} = M = \underset{\text{abg.}}{\overline{M}}$ ✓ $\square$

Hinweise zu Bl. 8, A4: Vor.: (R, δ) metr. Raum, $A, B \subseteq R$.

2. Beh.: $(A \cup B)^\circ \supseteq \mathring{A} \cup \mathring{B}$

Bew.: Sei $x \in \mathring{A} \cup \mathring{B}$, d.h. $x \in \mathring{A} \vee x \in \mathring{B}$

d.h. $\exists \varepsilon > 0$: $\underbrace{x \in B_x^\varepsilon \subseteq A}_{x \text{ ist inn. Pkt. von } A} \subseteq A \cup B$, $\underbrace{x \in B_x^\varepsilon \subseteq B}_{x \text{ ist inn. Pkt. von } B} \subseteq A \cup B$,

d.h. also $x \in B_x^\varepsilon \subseteq A \cup B$,

d.h. x ist inn. Pkt. von $A \cup B$,

d.h. $x \in (A \cup B)^\circ$. $\square$

zu 1. Beh.: $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Z.z.: „$\subseteq$", „$\supseteq$", d.h. $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$ ←

$\wedge\ (A \cap B)^\circ \supseteq A^\circ \cap B^\circ$. ←

Oder: Z.z.: $x \in (A \cap B)^\circ \iff x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

zu 8.:

Beh.: $\mathring{\mathring{A}} \subseteq \mathring{A}$, d.h. $\{x \in R;\ x \in \mathring{A}\}^\circ \subseteq \{x \in R;\ x \in \mathring{A}\}$

d.h.

$\mathring{M} \subseteq M$, wo $M := \mathring{A}$ ← wähle geeignete Notation

Zu (3): Sei R metr. Raum, $\mathcal{O} = \mathcal{O}(R) = \{ O \subseteq R ;\ O \text{ offen} \}$.
$K \subseteq R$ heißt Kompakt,

falls $K \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$, die $O_i \in \mathcal{O}$, I eine Menge $\Rightarrow \exists\, i_1, \dots, i_n \in I$: $K \subseteq O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n}$.

Hatten: im $R = \mathbb{R}^n$ sind die Kp. Teilmengen von R genau die $K \subseteq R$, die abg. und beschr. sind (Heine-Borel)

d.h. $\complement K = R \setminus K$ offen und
für die $\exists\, \delta > 0$:
$\forall x \in K : \ \|x - o\|_\infty \leq \delta$
$\Leftrightarrow \forall x \in K : \ x \in B_o^\delta$
$\Leftrightarrow K \subseteq B_o^\delta$

Beispiele:

- Sei $R = \mathbb{R}^1$ als metr. Raum.
  Bsp. für Kp. Teilmengen sind : $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$
  Bem.: Für $a = b$ ist $[a, b] = [a, a] = \{a\}$ abg. ✓
  beschr. ✓, da $\{a\} \subseteq B_o^{2|a|+1}$

- Bspe für nicht Kp. Teilmengen von $\mathbb{R}^1$ sind: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\underbrace{]-\infty, 3]}_{\text{nicht beschr.}}$, $\underbrace{]0, 1[}_{\text{nicht abg.}}$, $\underbrace{]0, 1]}_{\text{nicht abg.}}$

Beh.: Jede endliche Menge in einem metr. Raum ist Kompakt.

Bew.: Def Kp. sagt: $K \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$, die $O_i \in \mathcal{O}$, I eine Menge $\Rightarrow \exists\, i_1, \dots, i_n \in I$: $K \subseteq O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n}$.

Hier: Sei $K = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq R$. Seien $O_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$ mit $K \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$ geg.
Wähle zu jedem x_j ein O_{i_j}, $i_j \in I$, sodass $x_j \in O_{i_j}$.
Dann: $K \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}$, d.h. endl. viele der O_i reichen zur Überdeckung. $\square$

Bsp.: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

$$f: \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1], \quad f(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|+1}, & x \in \mathbb{R} \\ +1, & x = +\infty \\ -1, & x = -\infty \end{cases}$$

Beh.: $\delta(x,y) := |f(x) - f(y)|$ für alle $x,y \in \overline{\mathbb{R}}$ ist Metrik. ✓

z.z. (M1), (M2), (M3). ✓ ⌈Fallunterscheidung! (s. Seite -6-)⌋

Fazit: $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$ metrischer Raum. → offene Mengen: $\underset{a<0}{[-\infty, a[}$, $\underset{a>0}{]a,\infty]}$ sind Umg. von $-\infty$, von ∞

⌈hier ist $]a,\infty] :=]a,\infty[\cup \{\infty\}$, $a>0$⌋

⌈uneigentl. Kgz. von Folgen in $\mathbb{R}$ = Kgz. in $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$.⌋

Beh.: $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$ ist kompakt. ⌈$\overline{\mathbb{R}}$ heißt Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$⌋

Bew. über "Überdeckungskp."-Eigenschaft möglich...

Beispiel-Überdeckung:

$$\overline{\mathbb{R}} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1.1[\cup \underbrace{]10, \infty]}_{\text{ist offene Umg. von } \infty} \cup \underbrace{[-\infty, -10[}_{\text{ist offene Umg. von } -\infty}$$

(nämlich $= B^{1/11}_{\infty}$, vgl. S.-6-) (nämlich $= B^{1/11}_{-\infty}$ analog)

Ja, endl. viele dieser offenen Mengen reichen, nämlich

$$\overline{\mathbb{R}} \subseteq \bigcup_{n=-11}^{9}]n, n+1.1[\cup]10, \infty[\cup]-\infty, -10[.$$

⇝ Kompaktheit plausibel!

Zusatz zu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:

Beh.: $\delta(x,y) := |f(x) - f(y)|$ für $x,y \in \overline{\mathbb{R}}$ ist eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$.

Bew.: • (M3) gilt, denn • $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$: $\delta(x,y) = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)|$
$\le \delta(x,z) + \delta(z,y)$ nach Δ-Ungl. in $\mathbb{R}$.

Falls $x = \pm\infty$, gilt: $\delta(x,y) = |\pm 1 - f(z) + f(z) - f(y)|$
$\le |\pm 1 - f(z)| + |f(z) - f(y)| = \delta(x,z) + \delta(z,y)$,
auch, wenn ev. $y = \pm\infty$ oder $z = \pm\infty$.

• (M2) gilt, denn $\delta(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = \delta(x,y)$,
auch, wenn $x = \pm\infty$ oder $y = \pm\infty$.

• Zu (M1): z.z.: $x = y \iff \delta(x,y) = 0$. Bew.: Hier ist „$\Rightarrow$" klar per Def.: $\delta(x,x) = |f(x) - f(x)| = 0$ ✓

Zu „$\Leftarrow$": Seien $x,y \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $\delta(x,y) = 0$, zeige $x = y$ in jedem Fall.

• Falls $x = \pm\infty$, ist $0 = \delta(x,y) = \left|\pm 1 - \frac{y}{|y|+1}\right| \iff \pm 1 = \frac{y}{|y|+1}$.

(Für $y > 0$ gilt $\underbrace{+1}_{\text{da r.S.} > 0} = \frac{y}{y+1} = \frac{y+1-1}{y+1} = 1 - \frac{1}{y+1} \iff 0 = -\frac{1}{y+1}$ ↯, d.h. $y = +\infty = x$ ✓)

(Für $y < 0$ " $-1 = \frac{y}{-y+1} = \frac{y-1+1}{-y+1} = -1 + \frac{1}{1-y} \iff 0 = \frac{1}{1-y}$ ↯, d.h. $y = -\infty = x$ ✓)

• Falls $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $y = \pm\infty$, schließe ebenso/analog, dass dann $x = \pm\infty = y$. ✓

• Falls $x,y \in \mathbb{R}$,
gilt $0 = \delta(x,y) = \left|\frac{x}{|x|+1} - \frac{y}{|y|+1}\right| \iff \frac{x}{|x|+1} = \frac{y}{|y|+1}$.

Falls $x,y > 0$, heißt dies $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1} \iff 1 - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{y+1} \iff x = y$. ✓

Falls $x,y < 0$, heißt dies $\frac{x}{-x+1} = \frac{y}{-y+1} \iff -1 + \frac{1}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-y} \iff x = y$. ✓

Falls OE $x < 0 < y$, heißt dies $\underbrace{\frac{x}{-x+1}}_{<0} = \underbrace{\frac{y}{y+1}}_{>0}$, d.h. Fall tritt nicht ein.

□

(Offener) $\overset{0<\varepsilon<1}{\varepsilon}$-Ball um $a = \infty \in \overline{\mathbb{R}}$ ist dann

da $f(\infty) = 1$, ist $\infty \in B^\varepsilon_\infty$

ε-Bälle sind immer offen

$$B^\varepsilon_\infty = \{x \in \overline{\mathbb{R}};\ \delta(x,\infty) < \varepsilon\} = \{x \in \overline{\mathbb{R}};\ |f(x) - 1| < \varepsilon\}$$
$$= \{\infty\} \cup \left\{x \in \mathbb{R};\ \left|\frac{x}{|x|+1} - 1\right| < \varepsilon\right\} = \{\infty\} \cup \left]\frac{1}{\varepsilon} - 1, \infty\right[=: \left]\overset{>0}{\frac{1}{\varepsilon} - 1}, \infty\right].$$

⌈ Löse Ungl.: $\left|\frac{x}{|x|+1} - 1\right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \frac{x}{|x|+1} - 1 < \varepsilon \iff 1 - \varepsilon < \frac{x}{|x|+1} < 1 + \varepsilon$.

1. Fall: $x > 0 \leadsto 1 - \varepsilon < \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} < 1 + \varepsilon \overset{}{\underset{1-1}{\iff}} \underbrace{-\varepsilon < \frac{1}{x+1}}_{(x+1)\cdot(-\varepsilon) < 1\ ✓} < \varepsilon \underset{x+1>0}{\iff} x + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$
$\iff x > \max\{0, \frac{1}{\varepsilon} - 1\}$.

2. Fall: $x < 0 \leadsto 1 - \varepsilon < \frac{x}{-x+1} = -1 + \frac{1}{1-x} < 1 + \varepsilon \underset{1+1}{\iff} 2 - \varepsilon < \frac{1}{1-x} < 2 + \varepsilon \iff \frac{1}{2+\varepsilon} < 1 - x < \frac{1}{2-\varepsilon}$

$1 - x > 0$, OE $2 - \varepsilon > 0$

$\iff 1 + \frac{1}{2-\varepsilon} < x < 1 - \frac{1}{2+\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{2+\varepsilon} < -\frac{1}{2-\varepsilon}$ ↯ tritt nicht ein. ⌋