Tutorium zur Analysis II, Nr. 9

Themen:

✓ 1.) Funktionenfolgen - Begriffe

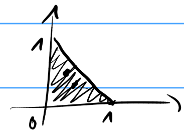
✓ 2.) Kriterien für Nachweise stetig/nicht stetig bei $f: R \to S$, R, S metr. Räume

~~3.) Bsp. für Kp. Mengen / Sätze damit~~

→ 4.) Kompakte Graph, s. Ü

✓ 5.) neues Ü-Blatt: Aufgabenstellungen

✓ → 6.) Bsp. für Konvergenz 13.16.

→ 7.) $\exists$ surj. Abb. $[0,1] \to \Delta :=$  die stetig ist

später bzw. s.u.

---

zu 1.): Funktionenfolgen: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \underbrace{\mathcal{C}(K,\mathbb{R})}$, $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt.

ist normierter VR,

bzgl. der Norm $\|\cdot\|_K : \mathcal{C}(K,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\|f\|_K := \sup\{|f(x)|;\ x\in K\} \in \mathbb{R}$

Da K kompakt, ist $\|f\|_K = \underline{\underline{\max}}\{|f(x)|;\ x\in K\}$.

• Def.: $\underbrace{f_n \xrightarrow{n\to\infty} f}_{\text{Kgz. in } \mathcal{C}(K,\mathbb{R})}$ $:\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \|f_n - f\|_K < \varepsilon$.

$n_0 = n_0(\varepsilon)$

d.h. $\boxed{\forall x\in K:} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

d.h. $f_n \rightrightarrows f$, d.h. f_n konvergiert gleichmäßig gegen f.

• ptw. Kgz.: $\forall x \in K\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$n_0 = n_0(\varepsilon, x)$

Bsp. für Funktionenfolgen:

Taylorentw.: $f(x) \approx \sum_{k=0}^{N} \underbrace{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{=: g_n(x)} = \sum_{n=0}^{N} g_n(x) = h_N(x)$

Folge $(h_N)_{N\in\mathbb{N}}$

Zu 2.): Sei $f: R \to S$, wo R, S metr. Räume.

f heißt stetig in a :$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall x:\ x \in B_a^\delta \Rightarrow f(x) \in B_{f(a)}^\varepsilon$

d.h. $\varrho(x,a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon$

bzw.: $f(B_a^\delta) \subseteq B_{f(a)}^\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{U}_{f(a)}\ \exists U \in \mathcal{U}_a:\ f(U) \subseteq V.$

f stetig :$\Leftrightarrow$ f in jedem $a \in R$ stetig

Satz: f stetig $\Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{O}(\sigma): f^{-1}(O) \in \mathcal{O}(\varrho)$
$\Leftrightarrow \forall O \subset S: f^{-1}(O) \subset R$ "Urbilder offener Mengen sind offen"

Kor.: f nicht stetig, falls $\exists O \subset S: f^{-1}(O) \subseteq R$ nicht offen

Bsp.: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ Dann: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f^{-1}(\underbrace{]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}[}_{\text{offen}}) = \mathbb{Q}$ nicht offen in $\mathbb{R}$ ✓

Schluss: f ist nicht stetig!

---

f stetig $\not\Rightarrow \forall O \subset R: f(O) \subset S$

Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 10$ stetig ✓

und $f(]0,1[) = \{10\}$ nicht offen in $S = \mathbb{R}$ ✓

Satz: f stetig, $f: R \to S$, $K \subseteq R$ kp. $\Rightarrow f(K)$ kp. ✓

Aber: f stetig, $f: R \to S$, $K \subseteq S$ kp. $\not\Rightarrow f^{-1}(K)$ kp.

Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 10$, $K := \{10\} \Rightarrow f^{-1}(K) = f^{-1}(\{10\}) = \mathbb{R}$ nicht kp. ✓

Zu 4.)/5.): A5 auf Bl. 10:

Vor.: Betr. $(\mathbb{R}, \delta)$ wo $\delta(x,y) = |x-y|$

und $(\mathbb{R}^2, \delta')$, wo $\delta'(x,y) = \|x-y\|_\infty$,

d.h. $x = \binom{\xi_1}{\xi_2}, y = \binom{\eta_1}{\eta_2} \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \delta'(x,y) = \max(|\xi_1-\eta_1|, |\xi_2-\eta_2|)$

Sei $f : \underset{\text{mit } \delta}{I \to \mathbb{R}}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ kompaktes Intervall,

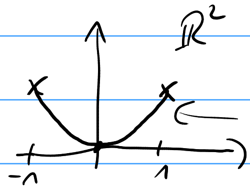
d.h. etwa $I = [a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$.

Beh.: f stetig $\boxed{(\Rightarrow)}$ $G_f \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt,

wo $G_f = \{(x, f(x));\ x \in I\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

f stetig $\overset{H.-B.}{(\Rightarrow)}$ $G_f \subseteq \mathbb{R}^2$ beschr. und abg.

Bsp.: $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
stetig ✓



$G_f = \{(x, x^2);\ x \in [-1,1]\}$

$\neq \underbrace{I \times f(I)}_{\text{Kp. wegen A3.1}}$

Bew.: „$\Rightarrow$": $f(I)$ ist Kp. nach Vorl., da I Kp.

Wissen: abg. Teilmengen von kp. Mengen (etwa $I \times f(I)$) sind kp. [s. Bew. H-B.]! Zeige: G_f abg. ... ✓

usw. ...

Andere Idee: Betr. $g : I \to \mathbb{R}^2$

$x \mapsto (x, f(x)) \in G_f$

$g(I) = G_f$, z.z.: g stetig!

usw...

Zu 6.): Nr. 13.16. im Skript:

$f: R \to S$, R, S metr. Räume

Was ist ein Funktionsgrenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x)$, wo $M \subseteq R$?

Vor.: $a \in \dot{M}$

Antwort: Ein $b \in S$ mit:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in M: \underbrace{\varrho(x,a)<\delta}_{x\in M\cap B_a^\delta} \Rightarrow \sigma(f(x),b)<\varepsilon$$

$$\Rightarrow f(x)\in B_b^\varepsilon$$

etwa $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N} \to \exists \delta=\delta_n$:

wähle $x_n \in B_a^\delta \Rightarrow f(x_n)\in B_b^{1/n}$

bzw. $\forall (x_n)\subseteq M$, $\underbrace{x_n \xrightarrow{n\to\infty} a}_{\text{in } R}$: $\underbrace{f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty} b}_{\text{in } S}$

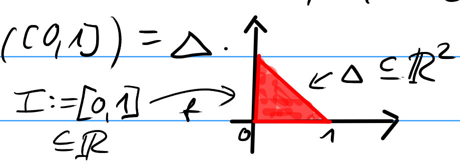
Bsp.: $\lim\limits_{\substack{x\to\binom{1}{0}\\ x\in M}} \|x\|_\infty = 1$, wo $\binom{1}{0}\in\dot{M}$,

z.B. $M = \left\{\binom{\xi_1}{\xi_2}\in\mathbb{R}^2;\ 0\le\xi_1,\xi_2\le 1\right\}$.

Haben $\|x\|_\infty = \max\{|\xi_1|,|\xi_2|\}$.

Zu 7.): Beh.: $\exists f:[0,1]\to\Delta := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x+y\le 1,\ x,y\ge 0\}$

f stetig und surjektiv, d.h. $f([0,1])=\Delta$.

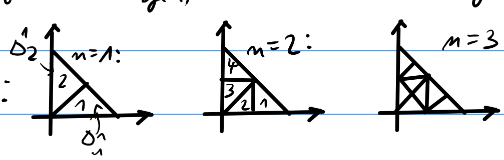


Bew.: Konstruieren zunächst rekursiv Zerlegungen von Δ als $\Delta = \bigcup_{j=1}^{2^n}\Delta_j^n$ in 2^n viele Teildreiecke Δ_j^n wie folgt:
gleichschenklig & rechtwinklig

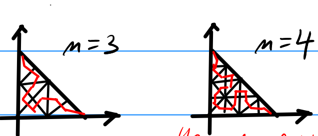
(i) $\Delta_j^n = \Delta_{2j}^{n+1}\cup\Delta_{2j-1}^{n+1}$ für alle $1\le j\le 2^n$,

(ii) Δ_j^n und $\Delta_{2j(-1)}^{n+1}$ haben für alle $1\le j\le 2^n$ eine gemeinsame Seite.

Anschaulich:



usw.



Wir erhalten für $n\to\infty$ eine "flächenfüllende Kurve", durch Verbindung von Dreiecksmittelpunkten.

- Im 1. Schritt $n=1$ setze $\Delta_1^1 := \Delta \cap \{(x,y);\ y \le x\}$

  $\Delta_2^1 := \Delta \cap \{(x,y);\ y \ge x\}$, $\Delta = \Delta_1^1 \cup \Delta_2^1$
- Sei im n-ten Schritt die Zerlegung $\Delta = \bigcup_{j=1}^{2^n} \Delta_j^n$ schon konstruiert.

  Im $(n+1)$-ten Schritt definiere Δ_j^{n+1}, $j = 1, \dots, 2^{n+1}$:

  Halbiere Δ_1^n in zwei rechtwinklige & gleichschenklige Dreiecke $\Delta_1^{n+1}, \Delta_2^{n+1}$ mit gemeinsamer Seite, ebenso Δ_2^n in $\Delta_3^{n+1}, \Delta_4^{n+1}$,

  ebenso Δ_3^n in $\Delta_5^{n+1}, \Delta_6^{n+1}$, ...

  ... ebenso $\Delta_{2^n}^n$ in $\Delta_{2^{n+1}-1}^{n+1}$, $\Delta_{2^{n+1}}^{n+1}$.

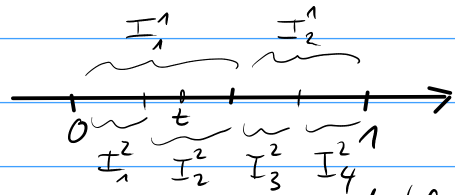
Haben auch Zerlegung von $I = [0,1] = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_j^n$ in 2^n viele Teilintervalle

$$I_j^n = I_{2j-1}^{n+1} \cup I_{2j}^{n+1}, \quad \text{alle } n \in \mathbb{N},\ j = 1, \dots, 2^n;$$

nämlich $I_j^n := \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right]$.

Definiere nun $f : I \to \Delta$ als $f(t) := (x,y) \in \Delta$,

wenn $\{t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{I_{k_n}^n}_{\text{Kp. IV}}$ $\to$ definiert Folge $(k_n) \subseteq \mathbb{N}$,



die t mit zugehöriger I-Schachtelung identifiziert,

und wo $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{k_n}^n = \{(x,y)\}$ ist.

Dann ist f <u>wohldefiniert</u>: Zu f gehört eine eind. Folge $(k_n) \subseteq \mathbb{N}$, die eindeutig einen Punkt $\{(x,y)\} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{k_n}^n$ definiert wegen <u>Satz 12.16</u>: Denn alle $\Delta_{k_n}^n$ sind kompakt, $\neq \emptyset$, und $\forall n \in \mathbb{N}: \Delta_{k_n}^n \supseteq \Delta_{k_{n+1}}^{n+1}$ (wegen Def. von k_n), also $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{k_n}^n \neq \emptyset$.

⌜Im Schnitt kann auch nur höchstens ein El. von $\mathbb{R}^2$ liegen! ...⌟

Also ist f eine Abb., und offenbar $f : I \to \Delta$. <u>Beh.:</u> $f(I) = \Delta$.

<u>Bew.:</u> Sei $(x,y) \in \Delta$ beliebig, def. $k_1 := \begin{cases} 1, & (x,y) \in \Delta_1^1 \\ 2, & \text{sonst} \end{cases}$, $k_{n+1} := \begin{cases} 2k_n - 1, & (x,y) \in \Delta_{2k_n-1}^{n+1} \\ 2k_n, & \text{sonst} \end{cases}$

$\leadsto \forall n: I_{k_{n+1}}^{n+1} \subseteq I_{k_n}^n \overset{\text{Satz 12.16}}{\leadsto} \exists t: \{t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{k_n}^n$, also $f(t) = (x,y)$. □