Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
SoSe 25

Analysis II

Blatt 0

Abgabe: Keine Abgabe

Besprechung: In den Übungen am 16.04 und 17.04.

Aufgabe 1. Seien $v = (1, -1, 2, -3)^T, w = (0, -\pi, e, 3)^T \in \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie

(a) $\|v\|_\infty$	(b) $\|v\|_2$	(c) $\|w\|_\infty$	(d) $\|w\|_2$	(e) $\|v+w\|_2$
(f) $\|v+w\|_\infty$	(g) $\|2v\|_2$	(h) $\|(-1)w\|_2$	(i) $\|2v+w\|_2$	(j) $\|2v-w\|_\infty$.

Aufgabe 2. Die Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty[$ sei gegeben durch

$$\|(x,y)\| = |y| + |y - x|.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V. Dann heißen die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ *äquivalent*, falls $A, B > 0$ existieren so, dass $A\|x\|' \leq \|x\| \leq B\|x\|'$ für alle $x \in V$ gilt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Norm $\|\cdot\|$ aus Aufgabe 2 und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent sind.

Aufgabe 4. Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $(a_k)_k$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Ferner seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ äquivalente Normen auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $(a_k)_k$ konvergiert gegen a bzgl. $\|\cdot\|$ genau dann, wenn $(a_k)_k$ gegen a bzgl. $\|\cdot\|'$ konvergiert.

Aufgabe 5. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Folgen, deren Folgenglieder ab einer gewissen Stelle alle Null sind, d.h. $V = \{(a_n) \,;\, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ so, dass } a_n = 0 \text{ für alle } n \geq N\}$. Ferner seien die Abbildungen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty : V \to [0, \infty[$ gegeben durch

$$\|(a_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_n|, \qquad \|(a_n)\|_\infty = \max\{|a_n| \,;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Diese definieren Normen auf V. Zeigen Sie, dass es kein $B \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $\|(a_n)\|_1 \leq B \cdot \|(a_n)\|_\infty$ für alle Folgen $(a_n) \in V$ gilt.