Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
SoSe 25

Analysis II

Blatt 1

Abgabe: Bis Samstag, den 19.04.25, 10:00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 23.04. und 24.04.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Die Abbildung $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$ sei gegeben durch

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

1. Bestimmen Sie $\|(1,-1,1,-1)\|_1$. (1P.)
2. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert. (3P.)
3. Zeigen Sie, dass $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n \cdot \|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. (2P.)

Aufgabe 2 (1 Punkt)**.** Sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \le \|x-y\|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 3 (1 Punkt)**.** Es seien $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ und $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x-a\|, \|y-a\| < r$, so gilt $\|\lambda x + (1-\lambda)y - a\| < r$ für alle $\lambda \in [0,1]$.

Aufgabe 4 (8 Punkte)**.** Sei $I = [0,1]$ und sei $\mathcal{C}_0(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\,;\, f \text{ stetig}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall I. Die Abbildungen $\|\cdot\|_S, \|\cdot\|_1 : \mathcal{C}_0(I) \to [0,\infty[$ seien definiert durch

$$\|f\|_S = \sup\{|f(x)|\,;\, x \in I\}, \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad (f \in \mathcal{C}_0(I)).$$

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|_S$ eine Norm auf $\mathcal{C}_0(I)$ definiert. (3P.)
2. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $\mathcal{C}_0(I)$ definiert. (3P.)
3. Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_S$ und $\|\cdot\|_1$ nicht äquivalent sind. (2P.)
   (*Hinweis*: Betrachten Sie die Funktionen $f_n(x) = \max\{2n - 2n^2 x, 0\}$.)

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.**

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)^{1/2}$$

2. Folgern Sie aus 1., dass für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt, dass
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{1/2}.$$
3. Folgern Sie aus 1., dass für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, dass
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right) \geq n^2.$$
4. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $H \geq 1$. Ferner seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $Q > 0$ so, dass $\sum_{m=1}^{n} |f(m)| \leq nQ$ gilt. Zeigen Sie mit Hilfe von 1., dass
$$\#\{m \leq n\,;\, |f(m)| > HQ\} < \frac{n}{H}.$$

Allgemeine Informationen:

1. Die Übungsblätter werden in der Regel aus fünf Aufgaben bestehen. Dabei gibt es zwei Arten von Aufgaben, die verschieden bewertet werden:
   (a) Die ersten vier Aufgaben sind stets *Verständnis-Aufgaben* (16 Punkte pro Blatt). Hier wird bei jedem Aufgabenteil bewertet, ob Ihre Bearbeitung sinnvoll (mit "1" bewertet) ist oder nicht (mit "0" bewertet). Hierbei ist eine sinnvolle Bearbeitung nicht mit einer vollständigen oder nahezu vollständigen Lösung gleichzusetzen, sondern auch gute Ideen/Ansätze werden als sinnvolle Bearbeitungen gewertet.
   (b) Die fünfte Aufgabe ist stets eine *Aufgabe zum präzisen Aufschrieb* (4 Punkte pro Blatt), d.h. die Bewertung dieser fünften Aufgabe erfolgt dann auf die klassische Art und Weise. Die Korrektor*innen erhalten ein festes Bewertungsschema, wonach diese die Punkte in Abhängigkeit Ihres Lösungsvorschlags vergeben werden. Bewertet wird also, ob Sie die Lösung formal richtig aufgeschrieben haben.
2. Abgaben von mehr als einer Person sowie verspätete Abgaben werden **nicht** korrigiert.
3. Die Abgabe erfolgt als **eine** (!!!) PDF-Datei.
4. Bitte verwenden Sie bei der Benennung der Datei, die Sie hochladen, das Format

   BlattXX_Nachname_Vorname.pdf,

   wobei XX für die Nummer des Blattes steht, also etwa XX = 01 oder XX = 11.
5. Bitte vermerken Sie die Nummer des Übungsblattes sowie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer deutlich lesbar auf der ersten Seite Ihrer Abgabe und lassen Sie dort genügend Raum zur Eintragung der Ergebnisse.
6. Eine Kurzanleitung zum Abgeben der Lösungen im ILIAS finden Sie auf unserer Homepage

   `https://www.math.uni-duesseldorf.de/~internet/Ana2_SoSe25/`

   sowie auf der ILIAS-Seite im Verzeichnis „Übungen“.