Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
SoSe 25

Analysis II

Blatt 2

Abgabe: Bis Freitag, den 25.04.25, 10:00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 30.04.

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ das Standard-Skalarprodukt und sei $c = (1, -2, 2) \in \mathbb{R}^3$. Ferner sei $H = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, c\rangle = 1\}$. Bestimmen Sie jeweils den Abstand des Nullvektors und des Vektors $(2, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$ zur Ebene H.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**

1. Überprüfen Sie die Folge (x_k) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:
$$(x_k) = \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!},\ \cos\left(\frac{1}{k}\right), \frac{\sin(k)}{k} \right). \tag{1P.}$$
2. Zeigen Sie, dass jede Cauchyfolge im $\mathbb{R}^n$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ konvergiert. (2P.)

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.**

1. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm im $\mathbb{R}^n$ und sei $\mathbb{R}$ mit der Betragsfunktion als Norm ausgestattet. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$, stetig ist. (1P.)
2. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
Untersuchen Sie, ob f stetig im Punkt $(0, 0)$ ist. (2P.)

Aufgabe 4 (8 Punkte)**.**

1. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass die induzierte Norm $\|\cdot\|$, gegeben durch $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, die *Parallelogrammgleichung*
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{5.1}$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. (1P.)
2. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm im $\mathbb{R}^n$, die die Gleichung (5.1) erfüllt. Zeigen Sie, dass durch
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$$
ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird, dessen induzierte Norm die Norm $\|\cdot\|$ ist. (7P.)

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Sei $\mathcal{C}_0([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\,;\ f \text{ stetig}\}$. Ferner seien die Normen $\|\cdot\|_S, \|\cdot\|_1$ wie auf Blatt 1 definiert. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \in \mathcal{C}_0([0,1])$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sqrt{n}x, & \text{falls } 0 \leq x < 1/n, \\ 2\sqrt{n} - n\sqrt{n}x, & \text{falls } 1/n \leq x < 2/n, \\ 0, & \text{falls } x > 2/n. \end{cases}$$

1. Bestimmen Sie $\|f_n\|_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (1P.)
2. Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) bzgl. $\|\cdot\|_1$ konvergiert. (1P.)
3. Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) bzgl. $\|\cdot\|_S$ divergiert. (2P.)