

Analysis II

Blatt 3

Abgabe: Bis Freitag, den 02.05.25, 10:00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 07.05. und 08.05.

Aufgabe 1 (5 Punkte).

1. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x, y) = \arctan(xy^2)$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f .
2. Die Abbildung $F : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$F(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos(\varphi) \sin(\vartheta), r \sin(\varphi) \sin(\vartheta), r \cos(\vartheta)).$$

Bestimmen Sie die Jacobimatrix von F und deren Determinante.

3. Zeigen Sie, dass die Norm $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von $\|\cdot\|_2$ für alle $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte). Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar ist und dass f nicht stetig in $(0, 0)$ ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte). Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar ist und dass $D_1 D_2 f(0, 0) \neq D_2 D_1 f(0, 0)$.

Aufgabe 4 (2 Punkte).

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch $a = (1, 1, 0)$ und $b = (0, 1, 1)$. Ferner sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) = xyz$. Für welches $v \in \mathbb{R}^3$ mit $v \in \overline{ab}$ gilt $f(a) - f(b) = \langle \text{grad} f(v), a - b \rangle$?
2. Sei $m \geq 2$. Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ so, dass $f(b) - f(a) \neq Df(x)(b - a)$ für alle $x \in \overline{ab}$ gilt. (*Hinweis:* Aufgabe 1.2 könnte hilfreich sein.)

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb). Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass f stetig und partiell differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$ ist.
2. Zeigen Sie, dass f nicht total differenzierbar ist.