Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
SoSe 25

Analysis II

Blatt 4

Abgabe: Bis Freitag, den 09.05.25, 10:00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 14.05. und 15.05.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

1. Wir definieren die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y) = \cos(x)e^y$.
   (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_v g(x_0)$ für $x_0 = (\frac{\pi}{3}, 2)^T$ und $v = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1)^T$.
   (b) Sei wieder $x_0 = (\frac{\pi}{3}, 2)^T$. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $\|a\|_2 = \|b\|_2 = 1$ so, dass $D_a g(x_0) \leq D_w g(x_0) \leq D_b g(x_0)$ für alle $w \in \mathbb{R}^2$ mit $\|w\|_2 = 1$ gilt.
   (c) Sei nun $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y, z) = (x + y, z - y + x)$. Bestimmen Sie nur mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung von $g \circ f$ im Punkt $(-\pi, \pi, 1)$.
2. Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar so dass $f(tx) = t^k f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt. Zeigen Sie, dass $\langle x, \operatorname{grad} f(x)\rangle = kf(x)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvex* (d.h. sind $a, b \in U$, so enthält U auch die Verbindungsstrecke $\overline{ab}$ von a und b) und sei $f : U \to \mathbb{R}$ total differenzierbar mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie, dass f auf U konstant ist.
2. Finden Sie alle partiell differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass $D_1 f(x, y) = x^4 + x^3 y$ und $D_2 f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + y^2 + 1$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.
3. Warum gibt es keine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ mit $D_1 f(x, y) = x^4 + x^3 y$ und $D_2 f(x, y) = x^4 + y^2 + 1$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

1. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$. Bestimmen Sie $D_1^2 f(x, y) + D_2^2 f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch
$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
   (a) Zeigen Sie, dass $D_1 D_2 f(0, 0) = D_2 D_1 f(0, 0)$.
   (b) Zeigen Sie, dass $f \notin \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ ist.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = yg(x)$ genau dann total differenzierbar in $(0, 0)$ ist, wenn g stetig in 0 ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y}{|y|}\sqrt{x^2 + y^2}, & \text{falls } y \neq 0, \\ 0, & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass f stetig in $(0, 0)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen im Punkt $(0, 0)$ existieren.
3. Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0, 0)$ nicht total differenzierbar ist.