

Analysis II

Blatt 5

Abgabe: Bis Freitag, den 16.05.25, 10:00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 21.05. und 22.05.

Aufgabe 1 (3 Punkte). In Satz 7.3 heißt der Ausdruck

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(a) (x - a)^\alpha$$

das *Taylorpolynom m -ter Ordnung von f im Entwicklungspunkt a* . Sei nun $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = y(y - \cos x - 1) + \cos x$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f im Entwicklungspunkt $(0, 0)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der folgenden Funktionen:

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + y - z$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (4x^2 + y^2) \exp(-x^2 - 4y^2)$.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = (y^2 - x^2)e^y$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und die lokalen Extrema der Funktion f .

Aufgabe 4 (4 Punkte).

1. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ das Standard-Skalarprodukt und sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ferner sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \langle x, Ax \rangle$. Bestimmen Sie $Df(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2$. Finden Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ so, dass $f(w) = w^T A w$ für alle $w \in \mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie alle kritischen Punkte sowie die lokalen Extrema der Funktion f .

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb). Sei $k \in \mathbb{N}$. Für gegebene Punkte $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Summe der Abstandskvadratrate

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{j=1}^k \|x - a_j\|_2^2.$$

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion f .