Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
SoSe 25

# Analysis II

## Blatt 6

Abgabe: Bis Freitag, den 23.05.25, 10:00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 28.05.

---

**Aufgabe 1** (7 Punkte)**.** Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$.

1. Bestimmen Sie die kritischen Stellen und die lokalen Extrema von $f$.
2. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von $f$ auf der Menge
$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\|_\infty \leq 1\}.$$

**Aufgabe 2** (3 Punkte)**.**

1. Drücken Sie $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ mit Hilfe von 7.3 in Potenzen von $x - 1$ und $y - 2$ aus.
2. Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie mit Hilfe von 7.3, dass ein $\theta \in [0, 1]$ existiert so, dass
$$\log\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{x + y - 2}{2 + \theta(x + y - 2)}.$$

**Aufgabe 3** (3 Punkte)**.** Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Kontraktionen bzgl. der jeweils angegebenen Norm sind:

1. $f(x, y) = \frac{1}{2}(\cos x, \sin y)$ mit $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.
2. $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y, y)$ mit $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.
3. $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y, y)$ mit $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.

**Aufgabe 4** (3 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion
$$f : [0, 1] \to [0, 1], \quad f(x) = \frac{2x + 1}{2x + 2}.$$

1. Zeigen Sie, dass $f$ eine Kontraktion ist.
2. Berechnen Sie die ersten beiden Schritte der in 8.6(b) gegebenen Fixpunktiteration für $x_0 = 1$.
3. Berechnen Sie den Fixpunkt von $f$.

**Aufgabe 5** (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Die Abbildung $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sei gegeben durch $f(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$.

1. Zeigen Sie, dass $Df(r, \varphi) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar ist für alle $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$.
2. Begründen Sie, dass $f$ nicht global umkehrbar ist.
3. Begründen Sie, dass $f$ lokal umkehrbar auf $\mathbb{R}_{>0} \times ]0, \pi/2[$ ist und bestimmen Sie $Df^{-1}(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$.