Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
SoSe 25

Analysis II

Blatt 7

Abgabe: Bis Freitag, den 30.05.25, 10:00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 04.06. und 05.06.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Wir definieren $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y, z) = x - y + 2z$. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f auf dem Ellipsoid $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = 4x^2 + 10y^2$. Bestimmen Sie die Maxima und Minima von f auf der Kreisscheibe $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.
(*Anleitung*: Berechnen Sie zunächst wie gewohnt die lokalen Extrema von f in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$ und dann auf dem Rand von K, d.h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$).

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (e^x + e^{-y}, e^{x+y})$. Zeigen Sie: Es existieren offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(0, 0) \in U$ und $(2, 1) \in V$ so, dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Berechnen Sie die Ableitung $Df|_U^{-1}$ für die Umkehrfunktion $f|_U^{-1} : V \to U$ von $f|_U$ an der Stelle $(2, 1)$.

2. Zeigen Sie, dass es keine stetig differenzierbare bijektive Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

1. Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f(x, y) = Ax + By$. Zeigen Sie: Ist B invertierbar, so gibt es eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ so, dass $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^k$. Geben Sie g explizit an und bestimmen Sie die Ableitung $Dg(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^k$.

2. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung von $\omega = (1, 1, 1)$ nach z auflösbar ist, d.h. dass es offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $(1, 1, 1) \in U \times V$ sowie genau eine Abbildung $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, V)$ gibt, die jedem $(x, y) \in U$ das eindeutig bestimmte $z \in V$ zuordnet, so dass $F(x, y, z) = 0$ gilt. Bestimmen Sie ferner $D\varphi(1, 1) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. Bestimmen Sie alle Vektoren $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\det Df(x, y) \neq 0$.

2. Zeigen Sie, dass jeder Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ genau zwei Urbilder besitzt.

3. Geben Sie für $c = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ ein $\varepsilon > 0$ an, so dass für $\mathcal{U} = \mathcal{U}_c^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x - c\|_\infty < \varepsilon\}$ die Abbildung $f|_\mathcal{U} : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $f|_\mathcal{U}$.