Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
SoSe 25

Analysis II

Blatt 8

Abgabe: Bis Freitag, den 06.06.25, 10:00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 11.06. und 12.06.

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Sei (R, δ) ein metrischer Raum.

1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ und sei $\delta_0 : R \times R \to \mathbb{R}$ definiert durch $\delta_0(x, y) = \alpha \cdot \delta(x, y)$. Zeigen Sie, dass δ_0 eine Metrik auf R ist.

2. Sei $\delta_1 : R \times R \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$\delta_1(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{1 + \delta(x, y)}.$$
Zeigen Sie, dass δ_1 eine Metrik auf R ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**

1. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine injektive Abbildung und sei $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\delta(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Zeigen Sie, dass δ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.

2. Sei R eine Menge, (Y, δ) ein metrischer Raum und sei $f : R \to Y$ bijektiv. Zeigen Sie, dass $\delta' : R \times R \to \mathbb{R}$, $\delta'(x, y) = \delta(f(x), f(y))$ eine Metrik auf R ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Sei (R, δ) ein metrischer Raum.

1. Zeigen Sie: Sind $x, y \in R$ mit $x \neq y$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\mathcal{U}_x^\varepsilon \cap \mathcal{U}_y^\varepsilon = \emptyset$.

2. Sei $x \in R$. Zeigen Sie, dass $\{x\}$ genau dann abgeschlossen ist, wenn für alle $y \neq x$ eine Umgebung $U \subseteq R$ von y existiert so, dass $x \notin U$.

Aufgabe 4 (8 Punkte)**.** Sei (R, δ) ein metrischer Raum und seien $A, B \subseteq R$. Zeigen Sie:

1. $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$
2. $(A \cup B)^\circ \supseteq \mathring{A} \cup \mathring{B}$
3. A offen $\iff A \cap \partial A = \emptyset$
4. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. $A \subseteq B \Rightarrow \overset{\bullet}{A} \subseteq \overset{\bullet}{B}$
7. ∂A ist abgeschlossen
8. $\overset{\bullet}{\overset{\bullet}{A}} \subseteq \overset{\bullet}{A}$.

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Sei $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\delta(x, y) = |x - y|$ und sei $\delta' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\delta'(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Zeigen Sie:

1. δ' definiert eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

2. Die metrischen Räume $(\mathbb{R}, \delta)$ und $(\mathbb{R}, \delta')$ besitzen die gleichen offenen Mengen.
(*Hinweis:*: Der direkte Verweis auf 11.13 ist nicht erlaubt.)

3. Der metrische Raum $(\mathbb{R}, \delta')$ ist nicht vollständig. (*Hinweis:* Betrachten Sie die Folge (n)).