Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
SoSe 25

Analysis II

Blatt 9

Abgabe: Bis Freitag, den 13.06.25, 10:00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 18.06.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Sei (R, δ) ein metrischer Raum. Ferner seien $x \in R$, $r > 0$ und

$$B = \{y \in R \mid \delta(x, y) \leq r\}.$$

1. Zeigen Sie, dass B eine abgeschlossene Teilmenge von R ist.
2. Zeigen Sie, dass $\overline{B_x^r} \subseteq B$ und finden Sie ein Beispiel für $\overline{B_x^r} \subsetneq B$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei (R, δ) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

1. Eine Teilmenge $A \subseteq R$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge (x_n) in A gilt, dass $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.
2. Sei (x_n) eine Cauchy-Folge in R. Besitzt (x_n) eine konvergente Teilfolge, so ist auch (x_n) konvergent und die Grenzwerte stimmen überein.
3. Die Folge (x_n) konvergiert genau dann gegen a, wenn für jede Umgebung $U \subseteq R$ von a ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$ gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei (R, δ) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

1. Jede endliche Teilmenge $A \subseteq R$ ist kompakt.
2. Die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen ist kompakt.
3. Der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Mengen ist kompakt.
4. Ist (x_n) eine konvergente Folge in R mit Grenzwert a, so ist die Menge $K = \{a\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kompakt.
5. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Aussage aus Aufgabenteil 4. im Allgemeinen falsch ist, wenn der Grenzwert a aus K entfernt wird.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Sei (R, δ) ein metrischer Raum und seien $A, B \subseteq R$. Zeigen Sie:

1. Ist R kompakt und A abgeschlossen, so ist A kompakt.
2. Sind A, B kompakt, so ist $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ kompakt.
3. Sind A, B kompakt mit $A \cap B = \emptyset$, so existieren offene Mengen $U, V \subseteq R$ mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$ so, dass $U \cap V = \emptyset$.

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Sei $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der Standardmetrik $\delta(x, y) = |x - y|$. Zeigen Sie nur mit 12.9, dass das Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist.