Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
SoSe 25

Analysis II

Blatt 10

Abgabe: Bis Freitag, den 13.06.25, 10:00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 25.06. und 26.06.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Sei (X, δ) ein metrischer Raum und sei $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $\delta'(x, y) = |x - y|$ versehen. Ferner seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie:

1. Die Menge $\{a \in X;\ f(a) = g(a)\}$ ist abgeschlossen in X.
2. Die Menge $\{a \in X;\ f(a) \leq g(a)\}$ ist abgeschlossen in X.
3. Die Menge $\{a \in X;\ f(a) < g(a)\}$ ist offen in X.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei (X, δ) ein metrischer Raum und sei $\emptyset \neq A \subseteq X$. Für $x \in X$ sei

$$\delta(x, A) := \inf\{\delta(x, a);\ a \in A\}$$

der Abstand zwischen x und A. Zeigen Sie:

1. $\delta(x, A) = 0$ genau dann, wenn $x \in \overline{A}$.
2. Sind $x, y \in X$, so ist $|\delta(x, A) - \delta(y, A)| \leq \delta(x, y)$.
3. Die Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \delta(x, A)$, ist stetig.
4. Ist A abgeschlossen und $B \subseteq X$ kompakt mit $A \cap B = \emptyset$, so ist
$$\inf\{\delta(b, A);\ b \in B\} > 0.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ seien $(R_1, \delta_1), \ldots, (R_n, \delta_n)$ metrische Räume, $R = R_1 \times \ldots \times R_n$ und $\delta : R \times R \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\delta((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max\{\delta_1(x_1, y_1), \ldots, \delta_n(x_n, y_n)\},$$

Dann definiert δ für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ eine Metrik auf R. Zeigen Sie:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und alle kompakten Mengen $A_i \subseteq R_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist $A_1 \times \ldots \times A_n$ kompakt in R.
2. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann ist $\mathrm{pr}_i : R \to R_i$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$, für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ stetig.
3. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Ist $U \subseteq R$ offen in R, so ist $\mathrm{pr}_i(U)$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ offen in R_i.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

1. (a) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{R}^n, \delta)$ mit $\delta(x,y) = \|x-y\|$. Zeigen Sie, dass die Menge $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$ kompakt ist.

   (b) Gegeben sei der metrische Raum $(\mathbb{R}^n, \delta)$, wobei $\delta(x,y) = \|x-y\|_\infty$. Ferner seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ mit $a_i < b_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Zeigen Sie, dass die Menge $Q = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_i \leq x_i \leq b_i\}$ kompakt ist.

2. Sei (R, δ) ein metrischer Raum und sei $f : R \to R$ schwach kontrahierend, d.h. für alle $x, y \in R$ mit $x \neq y$ gilt $\delta(f(x), f(y)) < \delta(x,y)$. Zeigen Sie: Ist R kompakt, so besitzt f einen eindeutig bestimmten Fixpunkt.

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Es sei $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $\delta(x,y) = |x-y|$ und $\mathbb{R}^2$ mit der Metrik $\delta'(x,y) = \|x-y\|_\infty$ ausgestattet. Sei nun $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn der Graph von f

$$G_f = \{(x, f(x));\ x \in I\}$$

kompakt in $\mathbb{R}^2$ ist.