Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
SoSe 25

Analysis II

Blatt 11

Abgabe: Bis Freitag, den 27.06.25, 10:00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 02.07. und 03.07.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei (X, δ) ein metrischer Raum, wobei $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass eine Folge (x_n) genau dann konvergiert, wenn sie ab einem bestimmten Folgenglied konstant wird.
2. Zeigen Sie, dass jede Teilmenge von X offen und abgeschlossen in X ist.
3. Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ stetig ist.
4. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge von X genau dann kompakt ist, wenn sie endlich ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wir betrachten die metrischen Räume $(\mathbb{R}, \delta)$ und $(\mathbb{R}^n, \delta')$, wobei $\delta(x, y) = |x - y|$ und $\delta'(x, y) = \|x - y\|_2$. Zeigen Sie:

1. Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ nicht zusammenhängend, und für alle $p \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ zusammenhängend.
2. Es gibt keine stetige bijektive Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.** Sei (R, δ) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

1. Sei $U \subseteq R$ offen in R und $M \subseteq R$. Dann ist $U \cap M$ offen in M.
2. Ist $A \subseteq R$ zusammenhängend, so ist auch $\overline{A}$ zusammenhängend.
3. Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von R mit $\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, so ist $\cup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.
4. Die Zusammenhangskomponente von $x \in R$ ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Mengen, die x enthalten.
5. Jede Zusammenhangskomponente von R ist zusammenhängend und abgeschlossen.
6. Jede zusammenhängende Menge ist in einer Zusammenhangskomponente enthalten.
7. Je zwei Zusammenhangskomponenten sind entweder gleich oder disjunkt.

Aufgabe 4 (1 Punkt)**.** Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, falls ein $a \in M$ existiert so, dass $\overline{ax} \subseteq M$ für alle $x \in M$ gilt. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass das Bild von M unter f wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Sei $K = [0,1]$. Wir betrachten den metrischen Raum (R, δ), wobei $R = \mathcal{C}^0([0,1])$ die Menge der auf $[0,1]$ definierten stetigen Funktionen ist und $\delta : R \times R \to \mathbb{R}$ die von der Supremumsnorm auf $[0,1]$ induzierte Metrik (d.h. $\delta(f,g) = \|f - g\|_K$). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \in \mathcal{C}^0([0,1])$ definiert durch

$$f_n(x) = \sin(2\pi x \cdot 2^n).$$

Ferner sei $M = \{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

1. M ist beschränkt.
2. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ gilt $\|f_n - f_m\|_K \geq 1$.
3. M ist abgeschlossen. (*Hinweis*: Hier dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass R bzgl. der Supremumsnorm vollständig ist.)
4. M ist nicht kompakt.