Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
SoSe 25

Analysis II

Blatt 12

Abgabe: Bis Freitag, den 04.07.25, 10:00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 09.07. und 10.07.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.**

1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass jede Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = ay$ von der Gestalt $y(x) = Ce^{ax}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ ist.

2. Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichungen

$$\text{(a) } y' = y + 1, \qquad \text{(b) } y' = y + x.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**

1. Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = e^{-y}\cos x$ mit $y(0) = 3$ und das größtmögliche Interval I_0, auf dem die Lösung definiert ist.

2. Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = -\dfrac{3x^2}{4y^3}$ mit $y(0) = 1$ und das größtmögliche Interval I_0, auf dem die Lösung definiert ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Es seien $j = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie jeweils mit Hilfe von 18.5 die Lösung der folgenden Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen $y(a) = b$:

$$\text{(a) } y' = -y\cos x, \qquad \text{(b) } y' = 2xy + 4x\exp(-x^2), \qquad \text{(c) } y' = -y + \sinh(x)e^{-x}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei (R, δ) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subseteq R$. Für $x \in R$ sei $Z(x) \subseteq R$ die Zusammenhangskomponente von x. Zeigen Sie:

1. Ist A offen in R, so ist jede Zusammenhangskomponente von A offen in A. (*Hinweis*: Hier dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass offene Kugeln in metrischen Räumen stets zusammenhängend sind.)

2. Ist A gleichzeitig offen und abgeschlossen in R und ist $x \in A$, so ist $Z(x) \subseteq A$.

3. Äquivalent sind:
   (a) A ist zusammenhängend.
   (b) Die einzigen Teilmengen von A, die offen und abgeschlossen in A sind, sind $\emptyset$ und A.
   (c) A besitzt nur eine Zusammenhangskomponente.

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Gegeben sei ein beliebig dehnbares Gummiband auf der x-Achse, ein Ende bei $x = 0$ fest. Das freie Ende entfernt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $V > 0$ vom festen Ende. Zur Zeit $t = 0$ habe das Band die Länge $L > 0$. Zu dieser Zeit fängt eine Schnecke bei $x = 0$ an, mit konstanter Geschwindigkeit $v > 0$ relativ zum Band auf diesem entlang zu kriechen. Erreicht sie das andere Ende des Bandes und wenn ja, wann?

Anleitung: Sei $y(t)$ die x-Koordinate der Schnecke zur Zeit t. Zu dieser Zeit ist das freie Ende des Bandes bei $Y(t) = L + tV$. Das Band wird gleichmäßig gedehnt. Für einen auf dem Gummiband festen Punkt (am Ort $s(0)$ zur Zeit $t = 0$), der sich nur mit dem Band bewegt, sei $s(t)$ der Ort des Punktes. Da das Band gleichmäßig gedehnt wird, bleibt die relative Position des Punktes erhalten, d.h.

$$\frac{s(t)}{s(0)} = \frac{L + tV}{L}.$$

Dann ist

$$\frac{s(t + t_0)}{s(t)} = \frac{L + (t + t_0)V}{L + tV} = 1 + \frac{t_0 V}{L + tV}.$$

Daraus folgt

$$s(t + t_0) = s(t) + \frac{t_0 V}{L + tV} \cdot s(t)$$

und somit

$$s'(t) = \lim_{t_0 \to 0} \frac{s(t + t_0) - s(t)}{t_0} = \lim_{t_0 \to 0} \frac{V}{L + tV} \cdot s(t) = \frac{V}{L + tV} \cdot s(t).$$

Dies ist die Geschwindigkeit des Punktes auf dem Gummiband zum Zeitpunkt t, der am Anfang ($t = 0$) an der Stelle $s(0)$ steht und keine Eigenbewegung macht. Die Schnecke hingegen hat zusätzlich die Eigenbewegung v, d.h. sie bewegt sich über der x-Achse (von außen betrachtet) mit der Geschwindigkeit

$$y'(t) = v + \frac{V}{L + tV} \cdot y(t).$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangsbedingung $y(0) = 0$. Lösen Sie diese Anfangswertaufgabe mit 18.5 und bestimmen Sie t_1 so, dass $y(t_1) = Y(t_1)$ gilt.