Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
SoSe 25

Analysis II

Blatt 13

Abgabe: Bis Freitag, den 11.07.25, 10:00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 16.07. und 17.07.

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$(1)\quad y''' - 2y'' + y' = 0, \qquad\qquad (2)\quad y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)**.**

1. Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der linearen Differentialgleichung $y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x}$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 3, y'(0) = 6$.
2. Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der linearen Differentialgleichung $y'' - 6y' + 9y = 2e^{2x}$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 0, y'(0) = 0$.
3. Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y'' + 2y' + 5y = 0$.
4. Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der linearen Differentialgleichung $y'' + 2y' + y = 3x^2$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 7, y'(0) = 0$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.**

1. Verifizieren Sie für die Matrizen $A, G, J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ die Identität $G^{-1}AG = J$, wobei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte Lösung $y = (y_1, y_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ des homogenen linearen Differentialgleichungssystems
$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - 4y_2 \\ y_2' &= \;\; y_1 - \;\; y_2 \end{aligned}$$
mit Anfangsbedingung $y(0) = (y_1(0), y_2(0))^T = (3, 1)^T$.

   Anleitung: Seien die Matrizen A, G, J wie in Aufgabenteil 1. gegeben. Für das obige System schreiben wir $y' = Ay$, wobei $y = (y_1, y_2)^T$. Für die Funktion $z = G^{-1}y$ (also $z(t) = G^{-1}y(t)$) gilt dann, dass $z' = G^{-1}y'$ und somit $z' = G^{-1}AGG^{-1}y = G^{-1}AGz = Jz$. In 23.12 sehen wir, dass
$$\begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x \end{pmatrix}$$
eine Basis der Lösungen von $z' = Jz$ bilden. Benutzen Sie nun $z = G^{-1}y$, um die eindeutig bestimmte Lösung $y = (y_1, y_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ mit $y(0) = (y_1(0), y_2(0))^T = (3, 1)^T$ zu bestimmen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie mit Hilfe von Satz 19.4 die eindeutig bestimmte Lösung $y : \mathbb{R} \to \,]0, \infty[$ der Differentialgleichung $y' = \sqrt{y} - y$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 4$.

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.**

1. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar mit (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und einer Basis $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ von Eigenvektoren so, dass $Av_j = \lambda_j v_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Zeigen Sie, dass die n Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mit $\varphi_j(x) = e^{\lambda_j x} v_j$ eine Basis des Lösungsraums von $y' = Ay$ bilden. (*Hinweis*: Hier dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass der Lösungsraum von $y' = Ay$ ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist)

2. Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte Lösung $y = (y_1, y_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ des homogenen linearen Differentialgleichungssystems
$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 9y_1 + y_2 \end{aligned}$$
mit Anfangsbedingung $y(0) = (y_1(0), y_2(0)) = (0, 12)^T$.