Vorlesung Analysis II

SoSe '25 hhu
K. Halupczok

Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

an1: Der $\mathbb{R}^n$ als normierter Vektorraum

Stichworte: $\mathbb{R}^n$ mit Normen $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$, (Folgen)Konvergenz, GWSätze, Projektionen

---

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.1

Hier und im gesamten Skript steht [Hoff] für das Buch
Dieter Hoffmann: Analysis für Wirtschaftswissenschaftler und Ingenieure,
s. auch die Literaturangaben auf der Webseite der Vorlesung zur Analysis II.
In diesem Buch finden Sie bestimmte Skriptteile ausführlicher aufgeschrieben.

1.1. Bedienungsanleitung der Vorlesung "Analysis II" (wie schon in "Analysis I"):

- Vor jedem Termin erscheint auf der Webseite kurzfristig ein neues Kurz-Skriptteil zur nächsten Vorlesungssitzung. Sie können einen Vorab-Blick hineinwerfen.
- Besuchen Sie unbedingt die Vorlesungstermine! Das Skript wird dort ausführlich erklärt, erläutert, entwickelt und veranschaulicht. Der Stoff ist ohne den zugehörigen mündlichen Ergänzungen nicht zu erfassen.
- Lesen Sie zusätzlich ergänzende Literatur im Selbststudium, etwa die angegebene Literatur, was hier häufig das Buch [Hoff] ist.
- Überlegen Sie selbständig die angegebenen Übungsvorschläge, die mit dem Übungssmiley ü markiert sind. Sprechen Sie mit anderen darüber.
- Besuchen Sie regelmäßig das Tutorium / Ihre Übungsgruppe, um weitere Beispiele kennenzulernen und fleißig zu üben.
- Das Skript enthält einen Farbcode: gelb für Notationen / Bezeichnungen, rot unterstrichen werden Begriffdefinitionen und Namen wichtiger Sätze, blau unterstrichen werden Referenznummern und Zitierungen, grün unterstrichen werden Behauptungen / Sätze / Lemmas / Korollare, orange unterstrichen werden wesentliche Beweisideen.

In Analysis II geht es in erster Linie um die mehrdimensionale Analysis.
Es wird davon ausgegangen, dass Sie die grundlegendsten Begriffe der Linearen Algebra I und Analysis I beherrschen oder sich parallel zur Veranstaltung "Analysis II" aneignen.
Im Anhang dieses Kapitels finden Sie eine Kurzzusammenstellung der für uns wichtigsten Inhalte der LA I (andere werden bei Bedarf später dargestellt).

1.2. Einleitung: Wir stellen einige Arbeitsdefinitionen (insbesondere Normen) in diesem Kapitel bereit, die als Grundlage für Funktionen, die von mehr als nur einer Variablen abhängen, dienen. Für Grenzwerte müssen wir "Abstände" zwischen Argumenten und Funktionswerten messen können, wofür Normen eingeführt werden. Viele Überlegungen der eindimensionalen Analysis können so fast wörtlich auf die mehrdimensionale Situation übertragen werden.

1.3. Vereinbarung: Wir wollen Abbildungen von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ betrachten, $n,m \in \mathbb{N}$.
Haben:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} ;\ \alpha_r \in \mathbb{R} \right\}, \text{ schreiben auch oft } (\alpha_1, \dots, \alpha_r)^T.$$

(T für "transponiert")

Zu $\mathbb{R}^n \ni x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T \in \mathbb{R}^n$ setze das
(Standard-) Skalarprodukt $\langle x, y \rangle := \langle x | y \rangle := \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j$.

1.4. Def.: Für $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\|x\| := \|x\|_\infty := \max \{ |\xi_j| ;\ j \in \{1, \dots, n\} \} = \max_{1 \le j \le n} |\xi_j|,$$

die Maximumsnorm.

1.5. Bem: $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm im $\mathbb{R}^n$, d.h. $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty[$
mit
(N1) $x \neq 0 \Rightarrow \|x\|_\infty \neq 0$ (Definitheit)
(N2) $\|\alpha x\|_\infty = |\alpha| \cdot \|x\|_\infty$
(N3) $\|x+y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ (Dreiecksungleichung).
für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Bew.: im $\|\cdot\|_\infty \subseteq [0, \infty[$ und (N1) ist an Def. 1.4 ablesbar. (N3): Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ ist $|\xi_j + \eta_j| \underset{\text{1-dim. }\Delta\text{-Ungl.}}{\le} |\xi_j| + |\eta_j| \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, also $\|x+y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.
(N2): $|\alpha \xi_j| = |\alpha| |\xi_j| \le |\alpha| \cdot \|x\|_\infty$, also $\|\alpha x\|_\infty \le |\alpha| \cdot \|x\|_\infty$ ⊛.
Damit ist $\|x\|_\infty \underset{\text{Ex } \alpha \neq 0}{=} \|\tfrac{1}{\alpha} \cdot \alpha x\|_\infty \underset{⊛}{\le} |\tfrac{1}{\alpha}| \cdot \|\alpha x\|_\infty$, also $|\alpha| \cdot \|x\|_\infty \le \|\alpha x\|_\infty$. Mit ⊛ folgt "=". □

Neben $\|\cdot\|_\infty$ betrachtet man oft auch die "2-Norm" bzw. Norm, die aus dem Standard-Skalarprodukt entsteht:

1.6. **Def.:** Für $x = (\xi_1, \dots, \xi_m)^T \in \mathbb{R}^m$ sei $\|x\|_2 := \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^m |\xi_j|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^m \xi_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ die Norm / 2-Norm / euklidische Norm.

Für $x, y \in \mathbb{R}^m$ ist $\|x-y\|_2 = \|y-x\|_2$ der (euklidische) Abstand zwischen x und y.

Diese Definition für $\|x\|_2$ als "Abstand" von x zu $o = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ ist näher an der Anschauung als $\|\cdot\|_\infty$. Hingegen ist $\|\cdot\|_\infty$ einfacher handzuhaben, wenn Gegebenheiten auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt werden sollen.

Wegen folgender Tatsache macht es für die Grenzwertbildung/Stetigkeit/Differenzierbarkeit keinen wesentlichen Unterschied, mit welcher der Normen $\|\cdot\|_\infty$ oder $\|\cdot\|_2$ gearbeitet wird:

1.7. **Beh.:** Für $x \in \mathbb{R}^m$ ist $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$.

Bew.: • Für $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt $|\xi_j| = (|\xi_j|^2)^{1/2} \le \left(\sum_{j=1}^m |\xi_j|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2$, also $\|x\|_\infty \le \|x\|_2$.

• Weiter gilt $\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^m |\xi_j|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{j=1}^m \|x\|_\infty^2\right)^{1/2} = (m\|x\|_\infty^2)^{1/2} = \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$. □

Bem.: Es ist klar, dass aufgrund 1.7 auch $\|\cdot\|_2$ eine Norm ist, d.h. (N1)–(N3) gelten auch für $\|\cdot\|_2$. Ü

1.8. **Def.:** Konvergenz von Folgen: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Folge von Punkten x_k im $\mathbb{R}^m$. Dann konvergiert (x_k) gegen $a \in \mathbb{R}^m$, Notation: $x_k \xrightarrow{k\to\infty} a$ bzw. $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \ge m_0: \|x_k - a\|_\infty < \varepsilon$.

1.9. **Beh.:** Die Aussage mit $\|\cdot\|_2$ statt $\|\cdot\|_\infty$ ist hierzu äquivalent.

Bew.: Gilt Kgz. $x_k \xrightarrow{k\to\infty} a$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, so folgt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0\ \forall k \ge m_0: \quad \|x_k - a\|_2 \underset{1.7}{\le} \sqrt{m}\cdot\|x_k - a\|_\infty \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kgz. mit } \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \text{ bzgl. } \|\cdot\|_\infty}}{<} \sqrt{m}\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} = \varepsilon,$$

und gilt Kgz. bzgl. $\|\cdot\|_2$, so folgt analog

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0\ \forall k \ge m_0: \quad \|x_k - a\|_\infty \underset{1.7}{\le} \|x_k - a\|_2 \underset{\text{Kgz. bzgl. } \|\cdot\|_2}{<} \varepsilon.$$ □

Bem.: Aufgrund dieser Beh. sagt man, dass $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ (zueinander) äquivalente Normen sind, was mit 1.7 ausgedrückt wird.

Wortwörtlich ergeben sich die Grundeigenschaften für Konvergenz wie in Analysis I:

1.10. **Bem.:** (1) $x_k \to a$, $x_k \to b \Rightarrow a = b$ (Eindeutigkeit des GWes, vgl. An5.18.(1))

(2) $x_k \to a$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x_k \to \alpha a$

(3) $x_k \to a$, $y_k \to b \Rightarrow x_k + y_k \to a + b$ } (Grenzwertsätze, vgl. An5.26)

Bew.: (1): $0 \le \|a-b\| = \|a - x_k + x_k - b\| \underset{(N3),\ \Delta\text{-Ungl.}}{\le} \|a - x_k\| + \|x_k - b\| \xrightarrow{k\to\infty} 0+0=0$

$\Rightarrow \|a-b\| = 0 \overset{(N1)}{\Rightarrow} a = b$.

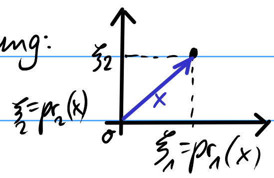
(2): $\|\alpha x_k - \alpha a\| \underset{(N2)}{=} |\alpha| \cdot \underbrace{\|x_k - a\|}_{\to 0} \to 0$.

(3): $\|(x_k + y_k) - (a+b)\| \underset{\Delta}{\le} \|x_k - a\| + \|y_k - b\| \to 0 + 0 = 0$. □

Nützlich zum Arbeiten mit dem $\mathbb{R}^n$ sind die Projektionsabbildungen.

1.11. **Def.:** Die Abbildung $pr_j = \pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $pr_j(x) := \xi_j$ heißt (j-te) Projektion / Projektion auf die j-te Koordinate/Komponente des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$.

Veranschaulichung:



Bem.:
- Die Abb. pr_j ist eine lineare Abb.
- Bei $x_k \to a$ erspart uns die Notation $pr_j(x_k)$ die Benutzung von Doppelindizes "ξ_{kj}".

Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ gilt komponentenweise, d.h. für jede Koordinate einzeln:

1.12. **Bem.:** Im $\mathbb{R}^n$ gilt: $x_k \xrightarrow{k\to\infty} a \iff \forall j \in \{1,\dots,n\}: pr_j(x_k) \to pr_j(a)$.

Bew.: Für j fest und alle k ist $|pr_j(x_k) - pr_j(a)| \le \|x_k - a\|_\infty$, was "$\Rightarrow$" zeigt. Wegen $\|x_k - a\|_\infty = \max\limits_{1\le j\le n} \{pr_j(x_k) - pr_j(a)\}$ folgt "$\Leftarrow$". □

1.13. **Bem.:** Aus der Linearen Algebra I/II ist bekannt (vgl. Anhang Nr. 6. unten) dass es neben dem (euklidischen) Standardskalarprodukt noch mehr Skalarprodukte $\langle , \rangle_{neu}$ gibt, die dann gemäß der Setzung $\|x\|_{neu} := \langle x, x\rangle_{neu}^{1/2}$ noch andere Normen induzieren. Ob und wie sich das auswirkt, untersuchen wir in Teil 2 dieser Vorlesung, wo wir allgemeiner normierte Vektorräume und metrische Räume zulassen und deren Analysis erarbeiten werden. In diesem Teil 1 beschränken wir uns zunächst auf den Fall $\mathbb{R}^n$, in Teil 2 wird also der "höhere Standpunkt" untersucht. Teil 3 der Vorlesung behandelt dann gewöhnliche Differentialgleichungen.

Anhang: Erforderliche Grundlagen der Linearen Algebra I (vgl. z.B. Skript aus SoSe '24):

Die genannten Grundlagen werden in jeder Vorlesung und jedem Lehrbuch zur LA I behandelt und unterscheiden sich oft nur durch die Notation.

Wir betrachten zunächst nur endlich-dimensionale reelle Vektorräume, die ja alle zu einem $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ die endliche Dimension, isomorph sind. [L13.19]

1. Der $\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix};\ \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R} \right\}$ ist mit der

(Vektor-) Addition $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \vdots \\ \xi_n + \eta_n \end{pmatrix}$

und (Skalar-) Multiplikation $\alpha \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha\xi_1 \\ \vdots \\ \alpha\xi_n \end{pmatrix}$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

$\to$ "$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$"   Das neutrale El. bzgl. + ist der Nullvektor $0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. [L9.5]

In der Analysis ist auch die Schreibweise der Vektoren als Zeilenvektoren üblich.

2. Jeder Vektorraum hat eine Basis. [L11.5.1.)]

Die naheliegenden Basisvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^n$ in Richtung der Koordinatenachsen bilden eine Basis, die man die kanonische (Einheitsvektoren-) Basis nennt. Haben $pr_j(e_i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Bsp.: $x = (3, -1.4, 17)^T \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow pr_1(x) = 3,\ pr_2(x) = -1.4,\ pr_3(x) = 17.$

3. • Eine Basis ist eine maximale linear unabh. Familie (hier: Tupel) von Vektoren (= Elemente des Vektorraums). Sie zeichnet sich dadurch aus, dass jeder Vektor x eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren geschrieben werden kann.

• Im Falle des $\mathbb{R}^n$ und der Einheitsvektorenbasis $(e_1, \dots, e_n)$ heißt das für $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, dass die Darstellung $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ mit den Koeffizienten $\xi_1, \dots, \xi_n$ (hier die Koordinaten/Komponenten von x) eindeutig bestimmt sind: Ist $\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n = \tilde{\xi}_1 e_1 + \dots + \tilde{\xi}_n e_n$, so folgt $\xi_1 = \tilde{\xi}_1,\ \xi_2 = \tilde{\xi}_2, \dots, \xi_n = \tilde{\xi}_n$.

Bsp.: $x = (3, -1.4, 17)^T \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow x = 3e_1 - 1.4 e_2 + 17 e_3$.

• Dasselbe gilt mit irgendeiner Basis $(b_1, \dots, b_n)$ mit $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^n$, d.h. das Koeffiziententupel $(\beta_1, \dots, \beta_n)^T$ in der Darstellung $x = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$ ist eindeutig bestimmt.

• Die Kardinalität der Vektoren einer Basis ist wohldefiniert und heißt Dimension des Vektorraums.
$\sim$ bzw. "Anzahl"

4. Zwischen verschiedenen Basen kann "hin- und hergeschaltet" werden durch Anwenden einer Matrixmultiplikation ⌈vgl. Kapitel L17 zum Thema "Basiswechselmatrizen"⌋.

5. Ein (reelles) Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform (über $\mathbb{R}$), d.h. eine Abb. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ so, dass 1.) $\langle x,x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, 2.) $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = o$,
3.) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$,
4.) $\langle \alpha x_1 + x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1,y\rangle + \langle x_2,y\rangle$ für alle $x_1,x_2,y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Es folgt bereits $\langle x, \alpha y_1 + y_2\rangle = \alpha\langle x,y_1\rangle + \langle x,y_2\rangle$ "
⌈wegen l.S. $\underset{3.)}{=} \langle \alpha y_1 + y_2, x\rangle \underset{4.)}{=} \alpha\langle y_1,x\rangle + \langle y_2,x\rangle \underset{3.)}{=}$ r.S.⌋

6. Für irgendein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ ist mit $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ erklärt. Speziell für $n=2$ und das Standard-Skalarprodukt $\left\langle \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}\right\rangle := \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$ ist $\left\|\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$ der Abstand zwischen $\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}$ und o laut Pythagoras.

7. Für ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ gilt die
Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn $x,y \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig sind.

Bew.: OE sei $\langle x,y\rangle \neq 0$, laut Definitheit ist dann $x \neq o \neq y$. Sei $\alpha := \frac{\langle x,y\rangle}{|\langle x,y\rangle|}\|y\|$, $\beta := \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|}$.
Dann: $0 \leq \|\alpha x - \beta y\|^2 = \langle \alpha x - \beta y, \alpha x - \beta y\rangle = \alpha^2\|x\|^2 - 2\alpha\beta\langle x,y\rangle + \beta^2\|y\|^2$
$= \|y\|^2\cdot\|x\|^2 - 2|\langle x,y\rangle|^2 + |\langle x,y\rangle|^2 = \|x\|^2\cdot\|y\|^2 - |\langle x,y\rangle|^2$, woraus die Ungl. folgt, und "$=0$" kann nur für $\alpha x - \beta y = 0$ eintreten. □

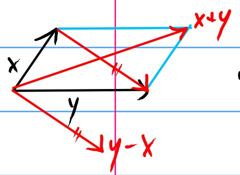
8. Ehe LA II: Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (d.h. $A^T = A$ bzw. $A = (\alpha_{ij})$ mit $\forall i,j: \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$),
die positiv definit ist (d.h. $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq o: \langle Ax,x\rangle > 0$),
wird durch $\langle x,y\rangle_A := \langle x, Ay\rangle$ ein Skalarprodukt definiert.
Laut Hurwitz-Kriterium ist A positiv definit genau wenn alle Hauptunterdeterminanten >0 sind, bzw. genau wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.
⌈Für symmetrisches A gilt
$$\langle Ax,y\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}\sum_j \alpha_{1j}\xi_j\\ \vdots \\ \sum_j \alpha_{nj}\xi_j\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}\right\rangle = \sum_{i,j}\alpha_{ij}\xi_j\eta_i \overset{\text{A symm.}}{=} \sum_j \xi_j \sum_i \alpha_{ji}\eta_i = \left\langle \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sum_i \alpha_{1i}\eta_i\\ \vdots\\ \sum_i \alpha_{ni}\eta_i\end{pmatrix}\right\rangle$$
$= \langle x, Ay\rangle$.⌋

Im folgenden sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

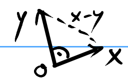
9. Im $\mathbb{R}^n$ heißen zwei Vektoren $x,y\in\mathbb{R}^n$ orthogonal / senkrecht aufeinander, falls $\langle x,y\rangle=0$ ist. In Zeichen: $x\perp y$.

Der Vektor o steht senkrecht zu jedem Vektor.

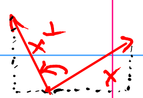
10. Elementargeometrische Sätze mit vektoriellem Beweis (im $\mathbb{R}^n$, eine Auswahl):



- Satz vom Rechteck: Parallelogramm ist Rechteck $\iff$ Diagonalen gleichlang
  ⌜$\|x-y\|^2=\|x+y\|^2 \iff \|x\|^2-2\langle x,y\rangle+\|y\|^2=\|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2 \iff \langle x,y\rangle=0$⌟
- Satz vom Rhombus: Parallelogramm hat gleichlange Seiten $\iff$ Diagonalen senkrecht
  ⌜$\langle x-y,x+y\rangle=\|x\|^2-\|y\|^2$, somit: $\|x\|=\|y\| \iff \langle x-y,x+y\rangle=0$⌟
- Satz von Pythagoras: Dreieck rechtwinklig $\iff \|x\|^2+\|y\|^2=\|x-y\|^2$



  ⌜klar mit $\|x-y\|^2=\|x\|^2-2\langle x,y\rangle+\|y\|^2$⌟



- Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im $\mathbb{R}^2$: $\perp:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $x\mapsto x^\perp:=\begin{pmatrix}-\xi_2\\ \xi_1\end{pmatrix}$, falls $x=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$
- Lie-Klammer im $\mathbb{R}^2$: $[x,y]:=\langle x^\perp,y\rangle=\det(x,y)$, ist bilinear & alternierend: $[x,y]=-[y,x]$
- Es gilt im $\mathbb{R}^2$: $\langle x,y\rangle^2+[x,y]^2=\|x\|^2\cdot\|y\|^2$, vgl. C-S-Ungleichung 7.

11. Kosinussatz: Für den Winkel $\alpha=\sphericalangle(x,y)$ zwischen $x,y\in\mathbb{R}^n$ gilt $\cos\alpha=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$.

Bew.: • Fall $n=2$: Haben $\alpha=\sphericalangle(x,\mathbb{R}\binom{1}{0})-\sphericalangle(y,\mathbb{R}\binom{1}{0})=:\varphi-\psi$, nach dem Additionstheorem für den cos folgt $\cos\alpha=\cos(\varphi-\psi)=\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\underset{\text{Def. cos/sin}}{=}\frac{\xi_1}{\|x\|}\frac{\eta_1}{\|y\|}+\frac{\xi_2}{\|x\|}\frac{\eta_2}{\|y\|}=\underset{\text{S.P. im }\mathbb{R}^2}{\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}}$.

- Für den Winkel α zwischen x,y gilt also
  $\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2\langle x,y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2-2\|x\|\cdot\|y\|\cos\alpha$.
- Beliebiges n: Die letzte Formel gilt für jedes n. Damit ist für jedes n richtig, dass $\|x\|^2+\|y\|^2-2\|x\|\cdot\|y\|\cos\alpha=\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2\underset{\text{S.P. im }\mathbb{R}^n}{\langle x,y\rangle}$, also $\cos\alpha=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$ für den zwischen x,y eingeschlossenen Winkel α richtig ist. □

12. Drehmatrizen: Die lineare Abb. $f_\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $x\mapsto D_\alpha x$, die eine Drehung der Vektoren um den Winkel $\alpha\in\mathbb{R}$ (im Bogenmaß) bewirkt, wird durch die Drehmatrix

$$D_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

beschrieben.

$\cos\frac{\pi}{2}=0$ $\sin\frac{\pi}{2}=1$

Bsp.: Drehung um $\frac{\pi}{2}$: $x^\perp=\begin{pmatrix}-\xi_2\\ \xi_1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1\\ 1&0\end{pmatrix}}_{=D_{\pi/2}}\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$.

13. <u>Def.:</u> Zu $x = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sei $x \times y := \begin{pmatrix}\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2\\ \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3\\ \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt von x und y.

14. <u>Satz (Eigenschaften des Vektorprodukts):</u> Für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten:

(1) $(\alpha u + \beta v) \times w = \alpha(u \times w) + \beta(v \times w)$, $u \times (\alpha v + \beta w) = \alpha(u \times v) + \beta(u \times w)$

(2) $u \times v = -v \times u$, d.h. $\times$ ist antisymmetrisch,

(3) u und v sind je orthogonal zu $u \times v$, d.h. $\langle u, u \times v\rangle = 0 = \langle v, u \times v\rangle$,

(4) für $\alpha = \measuredangle(u,v)$ ist $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2\alpha$.

(5) für die Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 gilt die Multiplikationstabelle

$\times$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

(6) es gilt $u \times v = 0 \iff \exists \alpha, \beta: \alpha u + \beta v = 0$ und nicht $\alpha = \beta = 0$, d.h. u, v sind linear abhängig,

(7) es gilt $\langle u, v \times w\rangle = \det(u, v, w)$. [L 23.11, Bew. s. dort]

Die Standardbasis (e_1, e_2, e_3) im $\mathbb{R}^3$ bildet ein Orthogonalsystem, weil je zwei der e_i senkrecht aufeinander stehen. Da $\|e_i\| = 1$ für $i = 1,2,3$, sind sie normiert, wir sprechen von einem Orthonormalsystem, kurz ONS.

Im $\mathbb{R}^3$ kann man ONSe grundsätzlich in zwei Sorten aufteilen gemäß "Orientierung".

15. <u>Def.:</u> • Drei Vektoren $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ bilden ein ONS, wenn $\forall i,j \in \{1,2,3\}: \langle x_i, x_j\rangle = \begin{cases}1, & i = j\\ 0, & i \neq j.\end{cases}$

• Ein ONS (x_1, x_2, x_3) im $\mathbb{R}^3$ heißt positiv orientiert, wenn $\det(x_1, x_2, x_3) = +1$, und negativ orientiert, wenn $\det(x_1, x_2, x_3) = -1$.

16. <u>Bem.:</u> • Ein ONS ist lin. unabh. und daher eine Basis des $\mathbb{R}^3$

⌐ $\sum \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow 0 = \langle 0, x_j\rangle = \langle \sum \lambda_i x_i, x_j\rangle = \sum \lambda_i \overbrace{\langle x_i, x_j\rangle}^{=\delta_{ij}} = \lambda_j$ für jedes j ⌙

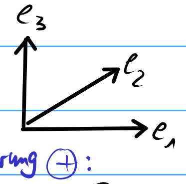
• Ein ONS hat stets positive oder negative Orientierung.

⌐ Haben also Darstellung als LK: $x_2 \times x_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$, da (x_1, x_2, x_3) Basis

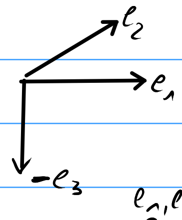
$\Rightarrow 0 = \langle x_2, x_2 \times x_3\rangle = \lambda_2$, ebenso $\lambda_3 = 0$, also $x_2 \times x_3 = \lambda_1 x_1$.

Da $\|x_2 \times x_3\| = 1 = \|x_1\|$, folgt $\lambda_1 = \pm 1$ und $\det(x_1, x_2, x_3) = \langle x_1, x_2 \times x_3\rangle = \langle x_1, \lambda_1 x_1\rangle = \lambda_1 = \pm 1$. ⌙

Anschaulich:



Orientierung ⊕:
e_1, e_2, e_3: Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der <u>rechten</u> Hand



Orientierung ⊖:
$e_1, e_2, -e_3$: Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der <u>linken</u> Hand

Man kann mit einem ONS leicht rechnen, was die Koordinatendarstellung betrifft:

17. **Satz:** Sind $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ein ONS, gilt $\forall y \in \mathbb{R}^3$:

(1) $y = \langle y, x_1\rangle x_1 + \langle y, x_2\rangle x_2 + \langle y, x_3\rangle x_3$,

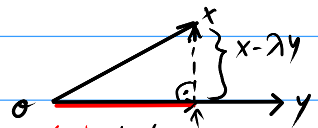
(2) $\|y\|^2 = \langle y, x_1\rangle^2 + \langle y, x_2\rangle^2 + \langle y, x_3\rangle^2$.

(3) Es gilt $x_3 = x_1 \times x_2$ (pos. or.) oder $x_3 = -x_1 \times x_2$ (neg. or.)

Bew.: (1): $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ zeigt $\langle y, x_j\rangle = \sum \lambda_i \overbrace{\langle x_i, x_j\rangle}^{\delta_{ij}} = \lambda_j$, (2): aus (1),

(3): $x_1 \times x_2 \underset{(x_1,x_2,x_3)\text{ Basis}}{=} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \underset{(1)}{=} \underbrace{\langle x_1 \times x_2, x_1\rangle}_{=0} x_1 + \underbrace{\langle x_1 \times x_2, x_2\rangle}_{=0} x_2 + \lambda_3 x_3 = \lambda_3 x_3$,

mit $1 = \|x_1 \times x_2\| = |\lambda_3| \cdot \|x_3\| = |\lambda_3|$ folgt $\lambda_3 = \pm 1$. $\square$



$p(x,y)$ = Lot λy,
haben $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$

18. **Senkrechte Projektion / Lote fällen:**

Def.: Lot von $x \in \mathbb{R}^n$ auf $y \in \mathbb{R}^n$: Vektor $p(x,y) := \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \cdot y$,

dieser Vektor heißt auch senkrechte Projektion von x entlang y.

Die Zahl $\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \in \mathbb{R}$ heißt Komponente von x entlang y.

⌜Bestimme $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $y \perp (x - \lambda y)$: $0 = \langle y, x - \lambda y\rangle = \langle y, x\rangle - \lambda \langle y, y\rangle$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$. ⌟

Somit $p(x, e_j) = pr_j(x) e_j$ wie in 1.11,
für alle $1 \le j \le n$.

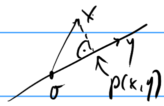
19. **Bsp.:** • Es ist $\left(\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{x_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{x_2}, \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{x_3} \right)$ ein ONS des $\mathbb{R}^3$. Sei $y = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,

dann sind $\langle y, x_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$,

$\langle y, x_2\rangle = 2$, $\langle y, x_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+3) = \sqrt{2}$ die Koordinaten von y bzgl. dem ONS,

d.h. $y = 2 \cdot \sqrt{2}\, x_1 + 2 \cdot x_2 + \sqrt{2}\, x_3$.

• Sei $x = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Dann ist $p(x,y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \cdot y = \frac{4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{16}{7} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$



und $\|x - p(x,y)\| = \left\| \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \frac{16}{7}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix}13/7\\3/7\\-6/7\end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{7} \cdot \sqrt{13^2 + 3^2 + (-6)^2}$

ist der Abstand von x zur Geraden $\mathbb{R}y$. $= \frac{1}{7} \cdot \sqrt{214} \approx 2.09$

20. **Def.:** Eine Abb. $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt linear, falls $\forall x,y \in \mathbb{R}^n \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{und} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

- Es genügt, dafür $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$ zu überprüfen (vgl. 5. oben, zur Linearität des Skalarprodukts im 1. und 2. Argument).
- Für jede lineare Abb. gilt $f(0) = 0$.
- Lineare Abb.en f sind durch die Angabe der Bilder $f(v_i)$ auf einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ eindeutig bestimmt/definiert.

21. **Def.:** Ist $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abb., so heißt

$$\ker f := \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = 0\} \text{ der Kern von } f,$$

$$\operatorname{im} f = f(\mathbb{R}^n) := \{f(x);\ x \in \mathbb{R}^n\} = \{y \in \mathbb{R}^m;\ \exists\, x \in \mathbb{R}^n : y = f(x)\}$$

das Bild von f.

- Für eine lineare Abb. gilt $\ker f = \{0\} \iff f$ injektiv, d.h. $\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n: f(x) = f(\tilde{x}) \Rightarrow x = \tilde{x}$.

22. • Jede lineare Abb. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wird durch eine Matrixmultiplikation $f: x \mapsto A \cdot x$ für eine Matrix $\underbrace{A = (\alpha_{ij})}_{\substack{m \text{ Zeilen}:\ 1 \le i \le m \\ n \text{ Spalten}:\ 1 \le j \le n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschrieben,

dabei gilt: die Spalten von A sind genau die Bilder $f(e_i)$ der Einheitsvektoren.

- Die Berechnung von $A \cdot x = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$

erfolgt nach der Formel $A \cdot x = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \xi_j \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{2j} \xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{mj} \xi_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

- Hintereinanderausführung zweier linearer Abb.en $\underbrace{\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^\ell}_{g \circ f}$ entspricht genau der Matrixmultiplikation ihrer darstellenden Matrizen: $g \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = B \cdot A\, x$,

wenn $f(x) = A \cdot x$, $g(x) = B \cdot x$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$. Dabei ist $B \cdot A \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$.

- **Bsp.:** Wird der $\mathbb{R}^2$ erst an der Geraden $y = 2x$ gespiegelt, $f(x) = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, und dann um $+\frac{\pi}{2}$ um den Mittelpunkt 0 gedreht, $g(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, so wird die Gesamtabb. $g \circ f$ beschrieben durch $g \circ f(x) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 & 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \\ 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} x = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} x$.