Vorlesung Analysis II

SoSe '25 hhu
K. Halupczok

Teil 2: Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen

an10: Konvergenz in metrischen Räumen

Stichworte: Normierter $\mathbb{R}$-VR, B-W, Äquivalenz aller Normen im $\mathbb{R}^n$, metrischer Raum, Kgz. darin

Literatur: [Forster], Kapitel 1, 2

10.1. **Einleitung:** Wir haben den $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen und damit die Grenzwerttheorie des $\mathbb{R}^n$ aufgebaut. Die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ ist dazu äquivalent. Wir beschreiben noch andere Normen, zeigen den mehrdimensionalen Satz von Bolzano-Weierstraß und damit, dass alle Normen in $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

10.2. **Def.:** Sei $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. Für $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n$ sei $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p\right)^{1/p}$ die p-Norm bzw. l_p-Norm bzw. Hölder-Norm.

10.3. **Bem.:** Für $p=2$ stimmt diese mit der in an1.6 definierten euklidischen Norm überein.

10.4. **Satz:** $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm.

Bew.: Zeigen Eigenschaften (N1)-(N3) in an1.5, und (N1), (N2) sind klar.

zu (N3): Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ist $p=1$, dann ist $\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ klar.

Ist $p > 1$, def. q durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, d.h. $q = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1} > 1$.

Dann ist
$$\|x+y\|_p^p = \sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j| \cdot |\xi_j + \eta_j|^{p-1} \leq \sum_{j=1}^n |\xi_j| |\xi_j + \eta_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^n |\eta_j| |\xi_j + \eta_j|^{p-1}$$
$$\overset{\otimes}{\leq} \|x\|_p \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j|^{q(p-1)}\right)^{1/q} + \|y\|_p \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j|^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$
$$= (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot (\|x+y\|_p)^{p/q}, \text{ also } \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \qquad \square$$

Zu $\otimes$: Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ ist $\sum_{j=1}^n |\alpha_j \beta_j| \leq \|a\|_p \cdot \|b\|_q$, denn ⌈ OE $\|a\|_p = \|b\|_q = 1$, es gilt:

exp ist konvexe Fkt. $\rightsquigarrow$ $\forall \alpha, \beta > 0: \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$. ⌈ $\alpha\beta = e^{\ln(\alpha)} e^{\ln(\beta)} = \exp\left(\frac{1}{p}\ln(\alpha^p) + \frac{1}{q}\ln(\beta^q)\right) \leq \frac{1}{p} e^{\ln(\alpha^p)} + \frac{1}{q} e^{\ln(\beta^q)}$ ✓⌋

10.5. **Bem.:** Man nennt die Δ-Ungl. (N3) für $\|\cdot\|_p$ auch Minkowski-Ungleichung.

Die folgende Beh. zeigt, warum man die Maximumsnorm $\|x\|_\infty := \max_{1\le j\le n} |\xi_j|$ mit dem ∞-Zeichen im Index schreibt:

10.6. **Beh.:** $\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Bew.: Wähle $j \in \{1,\dots,n\}$ mit $\|x\|_\infty = |\xi_j| =: M$. Sei OE $x \neq 0$.

Dann gilt $M = (|\xi_j|^p)^{1/p} \le \|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p\right)^{1/p} \le (nM^p)^{1/p} = n^{1/p} M \xrightarrow{p\to\infty} 1 \cdot M$. □

10.7. **Def.:** Eine Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt $:\Leftrightarrow (\|x_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt (in $\mathbb{R}$)
$\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\|_\infty \le M$.

10.8. **Satz von Bolzano-Weierstraß (im $\mathbb{R}^n$):**
Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bew.: Sei (x_n) beschränkt.
Es genügt, z.z.: $\exists$ Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ $\forall j \in \{1,\dots,n\}$: $pr_j(x_{\varphi(n)})$ konvergiert.
Dazu sei j fest. Dann ist $(pr_j(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.
Dann $\exists$ Teilfolge $(x_{\varphi(n)})$ mit $pr_j(x_n)$ kgt. laut 1-dim. B-W.
Wenden dies für $j = 1,\dots,n$ an, erhalte somit Folgen
$\mathbb{N} \supseteq (\varphi_1(k)) \supseteq (\varphi_2(k)) \supseteq \dots \supseteq (\varphi_n(k))$, setze $\varphi(k) := \varphi_n(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Die Folge $(x_{\varphi(n)})$ ist eine konvergente Teilfolge, da sie laut Konstruktion in jeder Komponente konvergiert (d.h. bzgl. $\|\cdot\|_\infty$), vgl. an1.12. □

10.9. **Bem.:** p Norm auf $\mathbb{R}^n \Rightarrow \forall x,y \in \mathbb{R}^n : |p(x) - p(y)| \le p(x-y)$,
und damit ist jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ stetig.

Bew.: • Haben $p(x) = p(x-y+y) \underset{\Delta}{\le} p(x-y) + p(y) \Rightarrow p(x) - p(y) \le p(x-y)$,
und $p(y) = p(y-x+x) \le p(x-y) + p(x) \Rightarrow p(y) - p(x) \le p(x-y)$,
zusammen folgt $|p(x)-p(y)| = \max(p(x)-p(y),\ p(y)-p(x)) \le p(x-y)$.

• Die Stetigkeit folgt direkt: $\forall x\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y : p(x-y) < \delta \Rightarrow p(x) - p(y) \overset{!}{\le} \varepsilon$,
nämlich nimm $\delta = \varepsilon$, dann ist $p(x) - p(y) \underset{10.9}{\le} p(x-y) < \delta = \varepsilon$. □

10.10. **Satz:** Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, d.h.
Sind p, q beliebige Normen, dann $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}: p \leq \alpha q$ und $q \leq \beta p$.

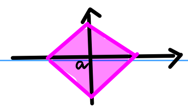
Bew.: Haben "Ä"-Relation der Normen (refl./symm./transitiv klar).
Daher gen. z.z.: Jede Norm ist zu $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent.

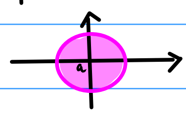
1. Schritt: Mit der Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$ gilt:
$$p(x) = p\Big(\sum_j \xi_j e_j\Big) \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_j p(\xi_j e_j) = \sum_j |\xi_j|\, p(e_j) \leq \|x\|_\infty \underbrace{\sum_{j=1}^n p(e_j)}_{=:\alpha}$$

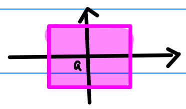
2. Schritt: Ann.: $\exists\, z \in S := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|_\infty = 1\}$ mit $p(z) = \inf_{x \in S} p(x)$.
$$\Rightarrow p(z) = \min_{x \in S} p(x).$$
Dann setze $\frac{1}{\beta} := p(z)$ (da ja $z \neq 0$).
Beh.: Dieses β tut's, d.h. $\|\cdot\|_\infty \leq \beta p$.
Denn: Sei OE $x \neq 0$, $y := \frac{x}{\|x\|_\infty} \in S$,
dann ist $\frac{1}{\|x\|_\infty} p(x) = p\Big(\frac{1}{\|x\|_\infty} \cdot x\Big) = p(y) \geq p(z) = \frac{1}{\beta}$
$$\Rightarrow \|x\|_\infty \leq \beta p(x) \text{ wie gewünscht.}$$
Zeige also Annahme:
Wähle $(x_k) \in S$ mit $p(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} \inf_{x \in S} p(x)$,
wegen $(x_k) \in S$ ist (x_k) beschränkt.
Mit B-W 10.8 folgt $\lim_{k\to\infty} x_{\varphi(k)} = z$.
Dann ist $\big|\, \|x_{\varphi(k)}\|_\infty - \|z\|_\infty \big| \underset{10.9}{\leq} \|x_{\varphi(k)} - z\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow \|z\|_\infty = 1$.

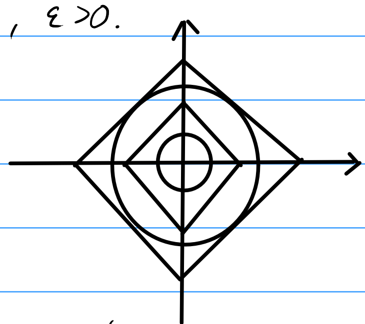
Haben somit ein $z \in S$ mit $p(z) = \inf_{x \in S} p(x)$, da p stetig nach 10.9. $\square$

10.11. **Bsp.:** Einheits"kugeln" bzgl. verschiedener Normen: Sei $a \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$.

$\{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x - a\|_1 \leq \varepsilon\}$ 

$\{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x - a\|_2 \leq \varepsilon\}$ 

$\{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x - a\|_\infty \leq \varepsilon\}$ 



Äquivalenz von $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$

Zur Abstandsmessung in normierten $\mathbb{R}$-VRäumen dient der Term $\|x-y\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

10.12. Def.: In einem endlichdim. normierten $\mathbb{R}$-VR $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ heißt die Abb. $\delta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\delta(x,y) := \|x-y\|$ die zu $\|\cdot\|$ gehörige Metrik.

10.13. Bem.: Die zu $\|\cdot\|$ gehörige Metrik erfüllt die folgenden Eigenschaften:

(M1) $\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, denn $\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M2) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$, denn $\delta(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1| \cdot \|y-x\| = \|y-x\| = \delta(y,x)$.

(M3) $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$,

denn $\delta(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \overset{\triangle}{\leq} \|x-y\| + \|y-z\| = \delta(x,y) + \delta(y,z)$.

Diese drei Grundeigenschaften der "Abstandsmessung" sind ohne Angabe einer Norm formulierbar, wir sprechen dann allgemeiner von einem metrischen Raum.

10.14. Def.: Sei R eine Menge und $\delta: R \times R \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Abb. mit den Eigenschaften

(M1) $\forall x,y \in R$: $\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $\forall x,y \in R$: $\delta(x,y) = \delta(y,x)$ (Symmetrie)

(M3) $\forall x,y,z \in R$: $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$ ($\triangle$-Unglg.)

Dann heißt δ eine Metrik (auf R) und (R,δ) ein metrischer Raum.

10.15. Folgerungen: (1) $|\delta(a,b) - \delta(x,y)| \leq \delta(a,x) + \delta(b,y)$

(2) $|\delta(a,b) - \delta(a,y)| \leq \delta(b,y)$.

Bew.: (1): $\delta(a,b) \underset{(M3)}{\leq} \delta(a,x) + \delta(x,b) \leq \delta(a,x) + \delta(x,y) + \delta(y,b)$

$\Rightarrow \delta(a,b) - \delta(x,y) \leq \delta(a,x) + \delta(b,y)$,

analog: $\delta(x,y) - \delta(a,b) \leq \delta(a,x) + \delta(b,y)$.

(2): Setze $x=a$ in (1). $\square$

Konvergenz kann in metrischen Räumen erklärt werden. Sei dazu (R,δ) metrischer Raum.

10.16. Def.: Eine Folge $(x_k) \subseteq R$ konvergiert gegen $a \in R$ $:\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \delta(x_k, a) = 0$.

Notation: $x_k \xrightarrow{k\to\infty} a$ bzw. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.

Nennen a den Grenzwert der Folge (x_k) in R, kurz: GW.

10.17. Eigenschaften der Konvergenz im metrischen Raum:
(1) $x_k \to a$, $x_k \to b \Rightarrow a = b$ (Eindeutigkeit des GW)
(2) $x_k \to a$, $y_k \to b \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \delta(x_k, y_k) = \delta(a,b)$ (Stetigkeit der Metrik).
Bew.: Zu (1): $a = b \Leftrightarrow \delta(a,b) = 0$, aber: $\delta(a,b) \le \delta(a,x_k) + \delta(x_k,b) \xrightarrow{k\to\infty} 0+0=0$.
Zu (2): $|\delta(x_k,y_k) - \delta(a,b)| \le \delta(a,x_k) + \delta(b,y_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0+0=0$. □

10.18. Def.: Eine Folge $(x_k) \subseteq R$ in einem metrischen Raum (R,δ) heißt
Cauchyfolge $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} \; \forall k,l \in \mathbb{N},\ k,l \ge k_0 : \delta(x_k, x_l) < \varepsilon$.

10.19. Satz: Jede konvergente Folge $(x_k) \subseteq R$ ist eine Cauchyfolge.
Bew.: Klar, geht genauso wie in An 5.21.

10.20. Def.: Ein metrischer Raum R heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert. (vgl. An 6.9)

Wir zeigen nun, dass jeder normierte endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-VR vollständig ist.
(Bemerke, dass jeder n-dimensionale $\mathbb{R}$-VR zu $\mathbb{R}^n$ isomorph ist, s. Lin. Algebra)

10.21. Satz: Es sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $\delta(x,y) = \|x-y\|$.
Dann ist $(\mathbb{R}^n, \delta)$ ein vollständiger Raum.
Bew.: Bekannt ist aus 10.10: $\exists M_1, M_2 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$: $\|x\| \le M_1 \|x\|_\infty$, $\|x\|_\infty \le M_2 \|x\|$.
Sei (x_k) eine Cauchyfolge bzgl. δ. Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists k_0 \in \mathbb{N} : \delta(x_k, x_l) < \frac{\varepsilon}{M_2}$,
d.h. $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$ wegen $\frac{\|x_k - x_l\|_\infty}{M_2} \le \|x_k - x_l\| = \delta(x_k, x_l)$ für alle $k,l \ge k_0$.
Daraus folgt: $|pr_j(x_k) - pr_j(x_l)| < \varepsilon$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$,
d.h. $(pr_j(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$.
Da $\mathbb{R}$ vollständig ist (vgl. An. 6.9), gilt: $\exists \alpha_j \in \mathbb{R} : \lim_{k\to\infty} pr_j(x_k) = \alpha_j$.
Setze $a := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} x_k = a$,
denn $\delta(x_k, a) = \|x_k - a\| \le M_1 \|x_k - a\|_\infty = M_1 \max_{1\le j\le n} |pr_j(x_k) - \alpha_j| \xrightarrow{k\to\infty} 0$. □

10.22. Bsp.: • $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ ist vollständiger $\mathbb{R}$-VR der Dimension 2. • $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ist nicht vollständig.
• $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_{sup})$ ist vollständig, $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_1)$ ist nicht vollständig, vgl. Ü Bl.1 A4, Bl.2 A5.
$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx$