Vorlesung Analysis II

SoSe '25 hhu
K. Halupczok

Teil 2: Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen

an11: Topologische Grundbegriffe

Stichworte: Umgebungsbasis, hausdorffsch, offen/abgeschlossen, Topologie

Literatur: [Forster], Kapitel 2

11.1. Einleitung:

Die bekannten Konzepte von "Kugel" und "Umgebungen" können im metrischen Raum definiert und studiert werden. Die mehrdimensionale Analysis hat es oftmals erfordert, dass um einen Punkt $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ immernoch eine komplette Umgebung von a in D enthalten ist. Wir verallgemeinern dies für metrische Räume und kommen so zum Konzept offener und abgeschlossener Mengen, das zentral für die Topologie (als Teilgebiet der Mathematik) ist.

11.2. Bezeichnung: Sei (R, δ) metrischer Raum, sei $a \in R$, sei $\varepsilon > 0$.

Dann heißt $B_a^\varepsilon := \{x \in R;\ \delta(x,a) < \varepsilon\}$ eine ε-Umgebung von a, ("Ball"/"Kugel"...)

und $\tilde{\mathcal{U}}_a := \{U \subseteq R;\ U = B_a^\varepsilon,\ \varepsilon > 0 \text{ geeignet}\}$

heißt eine Umgebungsbasis von a.

Bem.: $\tilde{\mathcal{U}}_a$ ist die Menge aller ε-Umgebungen von a, die in R enthalten sind.

11.3. Eigenschaften von ε-Umgebungen:

(B0) $\forall a \in R$: $\tilde{\mathcal{U}}_a \neq \emptyset$, bzw. $\forall a \in R\ \exists B_a^\varepsilon \in \tilde{\mathcal{U}}_a$,

d.h. zu jedem Punkt $a \in R$ gibt es eine Umgebung von a in R.

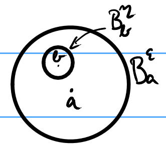
(B1) $\forall a \in R\ \forall B_a^\varepsilon \in \tilde{\mathcal{U}}_a$: $a \in B_a^\varepsilon$, d.h. jede Umgebung von a enthält a.

(B2) $\forall a \in R\ \forall B_a^{\varepsilon_1}, B_a^{\varepsilon_2} \in \tilde{\mathcal{U}}_a$: $B_a^{\varepsilon_1} \cap B_a^{\varepsilon_2} \in \tilde{\mathcal{U}}_a$, und $B_a^{\varepsilon_1} \cap B_a^{\varepsilon_2} = B_a^{\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$,

d.h. der Durchschnitt zweier Umgebungen von a ist Umgebung von a.

(B3) $\forall a,b \in R\ \forall B_a^\varepsilon \ni b\ \exists V \in \mathcal{U}_b : V \subseteq B_a^\varepsilon$,

d.h. ist b in einer Umgebung U von a, so ex. eine Umgebung V von b mit $V \subseteq U$.

Bew.:  $\eta := \varepsilon - \delta(a,b)$, sei $z \in B_b^\eta$, d.h. $\delta(z,b) < \eta = \varepsilon - \delta(a,b)$

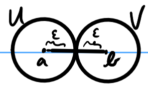
$\Rightarrow \delta(z,a) \leq \delta(z,b) + \delta(b,a) < \varepsilon \Rightarrow z \in B_a^\varepsilon \Rightarrow B_b^\eta \subseteq B_a^\varepsilon$. □

(B4) $\forall a,b \in R,\ a \neq b\ \exists U \in \mathcal{U}_a\ \exists V \in \mathcal{U}_b : U \cap V = \emptyset$,

d.h. verschiedene Punkte in R besitzen disjunkte Umgebungen.

Man nennt dies die Trennungseigenschaft, auch: R ist Hausdorff-Raum/hausdorffsch

→ "Hausdorffsches Trennungsaxiom" / "T2-Trennungsaxiom"

Bew.:  Wähle $U = B_a^\varepsilon$, $V = B_b^\varepsilon$ mit $\varepsilon = \frac{1}{2}\delta(a,b)$. □

11.4. Fazit: Metrische Räume sind hausdorffsch.

Eine leichte Verallgemeinerung ermöglicht es uns nun, von Umgebungen zu sprechen.

11.5. **Def.:** $U \subseteq R$ heißt Umgebung von a, falls $\exists B_a^\varepsilon \subseteq U$.

Setze $\mathcal{U}_a := \{U \subseteq R;\ B_a^\varepsilon \subseteq U$ für geeignetes $\varepsilon > 0\}$,

die Menge aller Umgebungen von a.

Bem.: (B0)–(B4) in 11.3 gelten dann analog.

11.6. **Def.:** $U \subseteq R$ heißt offen (d.h. offene Teilmenge), wenn $\forall u \in U : U$ ist Umgebung von u.

11.7. **Bsp.:** B_a^ε ist offen wegen (B3).

11.8. **Def.:** Setze $\mathcal{O} := \{U \subseteq R;\ U \text{ offen}\}$, die Menge aller offenen (Teil)mengen von R.

11.9. **Bsp.:** in $R = \mathbb{R}$ (als normierter VR bzgl. $|\cdot|$, dann also metrischer Raum bzgl. $\delta(x,y) = |x-y|$), sind offene Intervalle offene Mengen, aber auch beliebige Vereinigungen offener Intervalle offen. Schnitte endlich vieler solcher offener Mengen sind wieder solche, nicht aber Schnitte unendlich vieler, denn z.B. ist

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ keine offene Menge, obwohl alle IVe $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ offen sind.

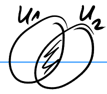
11.10. <u>Eigenschaften offener Mengen in R:</u>

$(\mathcal{O}_1)$ $\emptyset \in \mathcal{O}$, $U_i \in \mathcal{O}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$, d.h. $\emptyset$ und die beliebige Vereinigung offener Mengen ist offen.

⌜Denn: $a \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i \in I : a \in U_i \Rightarrow B_a^{\varepsilon_i} \subseteq U_i \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. ⌟

$(\mathcal{O}_2)$ $R \in \mathcal{O}$, $U_i \in \mathcal{O}, i \in \{1,\dots,n\} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{O}$, d.h. der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

⌜Denn: OE $n=2$ (sonst VI).



$a \in B_a^{\varepsilon_1} \in \mathcal{U}_a$, $a \in B_a^{\varepsilon} \in \mathcal{U}_a$

$\Rightarrow B_a^{\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \underset{\uparrow\, 11.3(B2)}{=} B_a^{\varepsilon_1} \cap B_a^{\varepsilon_2} \subseteq U_1 \cap U_2$. ⌟

11.11. <u>Bem.:</u> $(\mathcal{O}_2)$ gilt nicht für unendlich viele U_i, denn z.B. in $\mathbb{R}$ ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[= \{0\}$ nicht offen, obwohl jedes Intervall $]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$ offen ist.

11.12. <u>Bez.:</u> Eine Menge R mit einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von R derart, dass die Eigenschaften $(\mathcal{O}_1)$, $(\mathcal{O}_2)$ gelten, heißt <u>topologischer Raum</u>. In diesem Fall heißt $\mathcal{O}$ auch eine <u>Topologie auf/von R</u>.
Das Teilgebiet der Mathematik, in dem topologische Räume untersucht werden, nennt man <u>Topologie</u>.

11.13. <u>Beobachtung:</u> Seien $\|\cdot\|^{(1)}$ und $\|\cdot\|^{(2)}$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$, nach 10.10 sind diese äquivalent, d.h. $\exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}: \|\cdot\|^{(1)} \leq \alpha\|\cdot\|^{(2)} \leq \alpha\beta\|\cdot\|^{(1)}$.
Daraus folgt $\quad \delta^{(1)} \leq \alpha\delta^{(2)} \leq \alpha\beta\,\delta^{(1)}$ für die zugehörigen Metriken.
Somit ist $(B_0^{\varepsilon})^{(1)} \supseteq \frac{1}{\alpha}(B_0^{\varepsilon})^{(2)} \supseteq \frac{1}{\alpha\beta}(B_0^{\varepsilon})^{(1)}$ für alle $\varepsilon>0$,
bzw. $(B_z^{\varepsilon})^{(1)} \supseteq (B_z^{\varepsilon/\alpha})^{(2)} \supseteq (B_z^{\varepsilon/\alpha\beta})^{(1)}$ für alle $z\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$,
bzw. $(B_z^{\varepsilon})^{(1)} \subseteq (B_z^{\alpha\varepsilon})^{(2)} \subseteq (B_z^{\alpha\beta\varepsilon})^{(1)}$ für alle $z\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$.
Es ergibt sich, dass $\mathcal{O}^{(1)} = \mathcal{O}^{(2)}$ ist, die von den beiden Normen induzierten Topologien sind also gleich! Zum Studium topologischer Fragen auf $\mathbb{R}^n$ fixiert man deswegen <u>irgendeine</u> Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$.

Wir studieren im folgenden topologische Grundeigenschaften im metrischen Raum (R, δ).

11.14 <u>Def.:</u> Sei $M \subseteq R$, $a \in R$ geg.

Dann heißt a Häufungspunkt von M (kurz: HP von M)

$:\iff \forall U \in \mathcal{U}_a,\ (U \setminus \{a\}) \cap M \neq \emptyset$. (Vgl. auch Def. in An10.2.)

11.15 <u>Bezeichnung:</u> $\dot{M} := \{a \in R;\ a \text{ HP von } M\}$.

11.16 <u>Def.:</u> $M \subseteq R$ heißt abgeschlossen (kurz: abg.) $:\iff \complement M := R \setminus M$ offen,

d.h. wenn $\complement M$ (das Komplement von M) in R eine offene Teilmenge von R ist.

11.17 <u>Bezeichnung:</u> $\mathcal{A} := \{M \subseteq R;\ M \text{ abgeschlossene Teilmenge von } R\}$

sei die Menge aller abg. Teilmengen von R.

11.18 Eigenschaften abgeschlossener Mengen:

(A_1) $R \in \mathcal{A}$, $A_i \in \mathcal{A},\ i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$, [wegen (O_1)]

d.h. R ist abg. und beliebige Durchschnitte abg. Mengen sind abg.

(A_2) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $A_i \in \mathcal{A},\ i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$, [wegen (O_2)]

d.h. $\emptyset$ ist abg. und endliche Vereinigungen abg. Mengen sind abg.

11.19 <u>Bem.:</u> (A_2) gilt nicht für unendlich viele A_i,

denn z.B. in $\mathbb{R}$ ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1] =]0, 1]$ nicht abg.,

obwohl jedes Intervall $[\frac{1}{n}, 1]$ abg. ist.

11.20 <u>Bem.:</u> Es gibt Mengen, die (gleichzeitig) offen <u>und</u> abg. sind, z.B. $\emptyset$ und R.

11.21 <u>Bem.:</u> Für $M \subseteq R$ gilt: $M \in \mathcal{A} \iff \dot{M} \subseteq M$.

<u>Bew.:</u> $M \in \mathcal{A} \iff \complement M \in \mathcal{O} \iff \forall a \in \complement M\ \exists U \in \mathcal{U}_a : U \subseteq \complement M$

$\iff \forall a \in \complement M\ \exists U \in \mathcal{U}_a : U \cap M = \emptyset$

$\iff$ " " $: (U \setminus \{a\}) \cap M = \emptyset$

$\iff \complement M \subseteq \complement \dot{M} \iff \dot{M} \subseteq M$. $\square$

11.22 <u>Def.:</u> Sei $M \subseteq R$, $a \in R$.

Der Punkt a heißt innerer Punkt von M $\iff \exists U \in \mathcal{U}_a : U \subseteq M$.

(vgl. an4.2)

11.23. **Def.:** Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, dann heißt $\overset{\circ}{M} := \{a \in \mathbb{R};\ a$ innerer Punkt von $M\}$ (auch: M°) das Innere von M
und $\overline{M} := \{a \in \mathbb{R};\ \forall \varepsilon > 0 : B_a^\varepsilon \cap M \neq \emptyset\}$ die Menge der Berührungspunkte von M.

11.24. **Bem.:** $\overset{\circ}{M}$ ist die maximale offene Teilmenge von M,
d.h. $\overset{\circ}{M}$ offen und $(\overset{\circ}{M} \subseteq \tilde{M} \subseteq M$ mit $\tilde{M}$ offen $\Rightarrow \overset{\circ}{M} = \tilde{M})$.
Es folgt: $M = \overset{\circ}{M} \Leftrightarrow M$ offen.

11.25. **Bew.:** • $\overset{\circ}{M} = \{a \in \mathbb{R};\ \exists\, \varepsilon_{(a)} > 0 : B_a^{\varepsilon(a)} \subseteq M\} = \bigcup_{a \in \overset{\circ}{M}} \underbrace{B_a^{\varepsilon(a)}}_{\text{offen}}$ ist offen

• "$M = \overset{\circ}{M} \Rightarrow M$ offen" ist klar, da $\overset{\circ}{M}$ offen.
• Sei M offen, d.h. $\forall a \in M\ \exists\, \varepsilon_a > 0 : B_a^{\varepsilon_a} \subseteq M \Rightarrow a \in \overset{\circ}{M}$, also ist $M \subseteq \overset{\circ}{M}$.
Da $\overset{\circ}{M} \subseteq M$ klar ist, folgt $M = \overset{\circ}{M}$. □

11.26. **Beh.:** $\complement \overline{M} = (\complement M)^\circ$, insb. $\complement(\complement \overline{M}) = \overset{\circ}{M}$.
Bew.: $a \in \complement \overline{M} \Leftrightarrow \neg\ \forall \varepsilon > 0 : B_a^\varepsilon \cap M \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B_a^\varepsilon \cap M = \emptyset$
$\Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B_a^\varepsilon \subseteq \complement M \Leftrightarrow a \in (\complement M)^\circ$. □

11.27. **Beh.:** $\overline{M} \subseteq \mathbb{R}$ ist stets abg., und zwar ist $\overline{M}$ die kleinste abg. Menge in $\mathbb{R}$, die M enthält, d.h.: M abg. $\Leftrightarrow M = \overline{M}$. ["$\Rightarrow$": $\complement \overline{M} = (\complement M)^\circ = \complement M$, "$\Leftarrow$": $\complement M = \complement \overline{M} = (\complement M)^\circ$]

11.28. **Beh.:** $\overline{M} = M \cup \overset{\circ}{M}$, deswegen heißt $\overline{M}$ auch die abgeschlossene Hülle von M bzw. der (topologische) Abschluss von M.

11.29. **Def.:** $a \in \mathbb{R}$ heißt Randpunkt von $M \subseteq \mathbb{R}$ $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : M \cap B_a^\varepsilon \neq \emptyset \neq \complement M \cap B_a^\varepsilon$.
Bez.: $\partial M := \{a \in \mathbb{R};\ a$ Randpunkt von $M\}$ heißt der Rand von M.

11.30. **Beh.:** $\partial M = \partial(\complement M)$, $\partial M = \overline{M} \cap \overline{\complement M}$.

11.31. **Beh.:** $\overline{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$, $\mathbb{R} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M \cup (\complement M)^\circ$.
denn $\mathbb{R} = \overline{M} \cup \complement \overline{M} \overset{11.26}{=} \overline{M} \cup (\complement M)^\circ = \overset{\circ}{M} \cup \partial M \cup (\complement M)^\circ$.

11.32. **Bsp.:** • $M = [0,1[\ \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \overset{\circ}{M} =]0,1[$, $\overline{M} = [0,1]$, $\partial M = \{0,1\}$.
• $M = [0,1[^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \overset{\circ}{M} =]0,1[^2$, $\overline{M} = [0,1]^2$,
$\partial M = \{0\} \times [0,1] \cup \{1\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0\} \cup [0,1] \times \{1\}$.