Vorlesung Analysis II — SoSe '25 hhu

Teil 2: Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen — K. Halupczok

an13: Stetigkeit, Kompaktheit

Stichworte: Stetigkeit, Bilder kompakter Mengen sind kompakt, gleichmäßig stetig

Literatur: [Forster], Kapitel 3

13.1. Einleitung: Wir verallgemeinern den Stetigkeitsbegriff auf metrische Räume. Die grundlegenden Eigenschaften stetiger Abbildungen werden gezeigt. Die Bedeutung des Kompaktheitsbegriffs wird deutlich, u. a. in dem Satz, dass Bilder kompakter Mengen wieder kompakt sind, als Verallg. des Satzes vom Min./Max.

13.2. Vereinbarung: Seien $(R,\underset{\uparrow\ \text{rho}}{\rho})$, $(S,\underset{\uparrow\ \text{sigma}}{\sigma})$ metrische Räume, $f: R\to S$.

13.3. Def.: f heißt stetig in $a\in R$ $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in R: \rho(x,a)<\delta \Rightarrow \sigma(f(x),f(a))<\varepsilon$.

$\Leftrightarrow \forall V\in \mathcal{U}_{f(a)}\ \exists U\in \mathcal{U}_a: f(U)\subseteq V$.

f heißt stetig (auf R) $:\Leftrightarrow \forall a\in R$: f stetig in a

f heißt stetig in $D\subseteq R$ $:\Leftrightarrow f|_D$ stetig.

⌜dabei gilt: $D\subseteq (R,\rho) \Rightarrow (D, \rho|_{D\times D})$ metrischer Raum⌟

13.4. Bem.: f in a stetig $\Leftrightarrow \forall x_n\to a: f(x_n)\to f(a)$.

Bew.: „$\Rightarrow$": Gelte $x_n\to a$, $V\in\mathcal{U}_{f(a)}$.

Beh.: Für fast alle k gilt $f(x_n)\in V$.

Denn: Nach Vor. $\exists U\in\mathcal{U}_a: f(U)\subseteq V$ (OE $U=B_a^{\varepsilon}$).

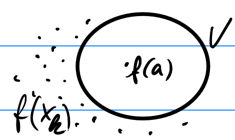
In B_a^{ε} liegen fast alle x_n, also liegen in V fast alle $f(x_n)$.

Da V beliebig, folgt: $f(x_n)\to f(a)$.

„$\Leftarrow$": Ann.: f nicht stetig. Konstruktion: $\exists V\in\mathcal{U}_{f(a)}\ \forall U\in\mathcal{U}_a: f(U)\not\subseteq V$,

OE $U=B_a^{1/n}$: $\exists x_n\in B_a^{1/n}$, $f(x_n)\notin V$

$\Rightarrow x_n\to a$, aber $f(x_n)\not\to f(a)$.



□

13.5. **Beh.:** f stetig
$\Leftrightarrow [O \in \mathcal{O}(\sigma) \Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathcal{O}(\varrho)]$ "Urbilder offener Mengen sind offen."
$\Leftrightarrow [A \in \mathcal{A}(\sigma) \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{A}(\varrho)]$ "Urbilder abg. Mengen sind abg."

Bew.: 1. Zeile „$\Leftarrow$": OE $\mathring{V} = V \in \mathcal{U}_{f(a)}$, dann $\exists\, U \in \mathcal{U}_a : f(U) \subseteq V$,
nämlich $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_a$, U (offene) Umg., da $f^{-1}(V)$ offen.
„$\Rightarrow$": Sei $O \in \mathcal{O}(\sigma)$, wähle $b \in O$ mit $b \in f(R)$, $b = f(a)$, $a \in R$.
Da f stetig und $O \in \mathcal{U}_{f(a)} \Rightarrow \exists\, U_a$ offen, $f(U_a) \subseteq O$
für alle b und alle a mit $f(a) = b$.
$\Rightarrow f^{-1}(O) \supseteq \bigcup_{a \in f^{-1}(O)} U_a \Rightarrow f^{-1}(O) = \bigcup_{a \in f^{-1}(O)} U_a$ offen.
2. Zeile: Für $A = \complement O$
ist $f^{-1}(A) = f^{-1}(\complement O) = \complement \underbrace{f^{-1}(O)}_{\text{offen nach 1. Zeile}}$ abg. □

13.6. **Stetigkeit bei Kompositionen:**
Vor.: $(R, \varrho) \xrightarrow{f} (S, \sigma) \xrightarrow{g} (T, \tau)$, f, g stetig.
Beh.: $g \circ f$ stetig.
Bew.: Für $O \in \mathcal{O}(\tau)$ ist $(g \circ f)^{-1}(O) = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(O)}_{\text{offen}})}_{\text{offen}}$ offen, mit 13.5. folgt die Beh. □

13.7. **Trivialität:** 1) f stetig, $D \subseteq R \Rightarrow f{\restriction_D}$ stetig.
2) f Konstant $\Rightarrow f$ stetig.

Erinnerungen an Kapitel an3:

13.8. **Beh.:** $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ stetig $\Leftrightarrow \forall j : f_j := pr_j \circ f$ stetig,
wo $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{pr_j} \mathbb{R}$. Vgl. an3.5.

13.9. **Beh.:** $(R, \|\cdot\|)$ normierter $\mathbb{R}$-VR $\Rightarrow \|\cdot\| : R \to [0, \infty[$ stetig. (Vgl. Blatt 2, A3.1).

13.10. **Beh.:** $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist stetig (bzgl. einer von einer Norm induzierten Metrik).
⌜Vgl. mit an3.18: "K" im dortigen Beweis nennen wir jetzt $\|A\|_\infty$.⌟

Bew.: Sei $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt $\|Ax\|_\infty = \max_{i \in \{1,\dots,m\}} \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right|$, $x = (x_1, \dots, x_n)$,
also $\|Ax\|_\infty \le \max_{i \in \{1,\dots,m\}} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \cdot |x_j| \le \underbrace{\left(\max_{i \in \{1,\dots,m\}} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \right)}_{=: \|A\|_\infty} \cdot \|x\|_\infty$.

Mit der Abschätzung $\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty$ mit der Def. für $\|A\|_\infty$ wie oben gilt also: $\forall x,y \in \mathbb{R}^n: \|Ax - Ay\|_\infty = \|A(x-y)\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|x-y\|_\infty$, woraus sofort die Stetigkeit von $A \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ folgt. $\square$

13.11. **Bem.:** Die hier gemachte Def. für $\|A\|_\infty$ als $\|A\|_\infty := \max\limits_{i\in\{1,\dots,m\}} \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|$ ist sinnvoller als die sonst naheliegende Setzung als $\max\limits_{i,j} |\alpha_{ij}|$, die wir früher in 4.26 und 5.12 gemacht haben. Die Stetigkeit hängt unmittelbar mit $\|A\|_\infty$ zusammen. Man nennt $\|A\|_\infty$ auch die Operatornorm von A (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$).

13.12. **Def.:** $\|A\|_{op} := \inf\{c \geq 0;\ \|Ax\|_V \leq c\|x\|_W \text{ für alle } x \in V\}$ heißt Operatornorm von $A \in Hom(V,W)$, wo $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte $\mathbb{R}$-VR seien.

Bem.: • Für $A \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist $\|A\|_{op} = \|A\|_\infty$ (für die Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$), und $\|A\|_{op} = \sup\{\|Ax\|_\infty;\ x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = 1\} = \sup\{\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty};\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$.

• $(Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{op})$ ist ein normierter VR. [Ohne Beweis, bzw. Ü, bzw. [Funktionalanalysis]]

13.13. **Satz:** Vor.: $D \subseteq R$, D kompakt, $f: R \to S$ stetig.

Beh.: $f(D)$ kompakt. "Bilder kompakter Mengen sind kompakt"

Bew.: Mit $f(D) = f_{\restriction D}(D)$ betrachte OE $D = R$. Sei eine offene Überdeckung von $f(R)$ vorgegeben, etwa $f(R) = \bigcup\limits_{O \in \mathcal{O}_1} O$. z.z.: endl. viele $O_j \in \mathcal{O}_1$ reichen aus.

Es ist $\bigcup\limits_{O\in\mathcal{O}_1} \underbrace{f^{-1}(O)}_{\substack{\text{offen}\\ \text{da } f \text{ stetig}}} \overset{\text{sogar } =}{\supseteq} R$, R kompakt nach Vor.

Es folgt: $\exists\, t$ viele i, etwa $i \in \{1,\dots,t\}: R \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{t} f^{-1}(O_i)$, $O_i \in \mathcal{O}_1$

$\Rightarrow f(R) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{t} f(f^{-1}(O_i)) = \bigcup\limits_{i=1}^{t} O_i$. $\square$

13.14. Spezialfall: $S = \mathbb{R}^n$, dann ist $f(D)$ beschränkt und abgeschlossen.

Falls $n=1$: $\exists d_1, d_2 \in D: f(d_1) \leq f(d) \leq f(d_2)$ für alle $d \in D$,

wobei also $f(d_1) = \min\limits_{d\in D} f(d)$, $f(d_2) = \max\limits_{d\in D} f(d)$.

Wir erhalten also wieder den bekannten Satz vom Min./Max An9.30 zurück.

Dies rechtfertigt nachträglich die Existenz von Extrema von Funktionen mit NBen, da die Nebenbedingungen in der Form $N = \bigcup\limits_{i=2} f^{-1}(0)$ meistens kompakt sind. Benutzt haben wir dies u.a. in 9.8., 9.9., 9.10., 9.20. haben: $\overset{\text{Null}\in\mathbb{R}}{\{0\}} \subseteq \mathbb{R}$, abg. & beschr.

Ein weiterer wichtiger Satz ist die gleichmäßige Stetigkeit von stetigen Fktn. auf Kompakta, vgl. An10.8.

13.15. Satz: Vor.: R kompakt, $f: R \to S$ stetig.

Beh.: f gleichmäßig stetig, d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in R: \varrho(x,y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$. Aus der Stetigkeit von f folgt

$$\forall x \in R\ \exists \delta_x > 0: \quad f(B_x^{2\delta_x}) \subseteq B_{f(x)}^{\varepsilon/2}.$$

Es ist $R \subseteq \bigcup_{x \in R} B_x^{\delta_x}$. Da R kompakt ist, folgt $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i}^{\delta_{x_i}}$.

Setze $\delta := \min_{i \in \{1,\dots,n\}} \delta_{x_i} > 0$.

Ferner wähle x, y so, dass $\varrho(x,y) < \delta$.

Dann $\exists x_i \in \{x_1, \dots, x_n\}: x \in B_{x_i}^{\delta_{x_i}}$.

Es ist also $\varrho(x, x_i) < \delta_{x_i}$, und ferner ist $\varrho(x,y) < \delta \leq \delta_{x_i}$,

so dass $\varrho(x_i, y) \underset{\Delta}{\leq} \varrho(x_i, x) + \varrho(x,y) < 2\delta_{x_i}$ folgt.

Nach Konstruktion von δ_{x_i} ist $\sigma(f(x_i), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$,

ebenso ist $\sigma(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$, so dass folgt:

$\sigma(f(x), f(y)) \underset{\Delta}{\leq} \sigma(f(x), f(x_i)) + \sigma(f(x_i), f(y)) < \varepsilon$.

Dies zeigt die gleichmäßige Stetigkeit. □

Die allgemeinste Def. für einen Funktionsgrenzwert für eine Fkt. f zwischen metrischen Räumen lautet wie folgt:

13.16. Def.: Sei $M \subseteq R$, $a \in \dot{M}$, $b \in S$, $f: R \to S$.

Wir sagen, $f(x) \to b$ konvergiert/strebt gegen b / $\lim_{x \to a} f(x) = b$ in M, wenn:

$f(x) \xrightarrow{x \to a} b$ für $x \in M$:$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M: \varrho(x,a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon$.

Wie schon in Analysis I, An10.4, gibt es den folgenden Zusammenhang zwischen Funktionsgrenzwerten und stetigen Fortsetzungen:

13.17. Vor.: $\tilde{f} := \begin{cases} f & \text{auf } M \setminus \{a\} \\ b & \text{für } x = a \end{cases}$

Beh.: $f(x) \xrightarrow{x \to a} b$ für $x \in M \Leftrightarrow \tilde{f}$ stetig in a. [$\tilde{f}$ heißt st. Forts. von f in a.]

13.18. Bem.: $f(x) \xrightarrow{x \to a} b$ für $x \in M \Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq M, x_n \to a: f(x_n) \to b$.