Vorlesung Analysis II — SoSe '25 hhu
Teil 2: Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen — K. Halupczok

an14: Weierstraßscher Approximationssatz (WAS)

Stichworte: Supremumsnorm auf kompakter Menge, WAS mit Polynomen

Literatur: [Königsberger, Analysis 1], Kapitel 15/16.

14.1. **Einleitung:** Die Bedeutung der Kompaktheit als topologische Eigenschaft ist für die Mathematik nicht zu unterschätzen. In diesem Kapitel zeigen wir als Anwendung davon den Weierstraßschen Approximationssatz (für Polynome und trigonometrische Polynome), und insb., dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

14.2. **Motivation:** Stetige Funktionen lassen sich auf kompakten Mengen beliebig genau durch Polynome approximieren. Dies besagt der WAS.

14.3. **Vereinbarung:** Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$, $\varepsilon > 0$.
Wir betrachten die glm. Konvergenz von f durch Funktionenfolgen auf K, zunächst mit Polynomen über $\mathbb{C}$, nämlich in der Supremumsnorm auf K.

14.4. **Def.:** Für $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ sei $\|\cdot\|_K : \mathcal{C}(K, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
$$\|f\|_K := \sup\{|f(x)|;\ x \in K\}$$
die Supremumsnorm auf K.

14.5. **Bem.:** Weil K kompakt, ex. $\|f\|_K$ immer und ist stets beschränkt (d.h. $\in \mathbb{R}_{\geq 0}$), und weiter ist das Supremum ein Maximum, vgl. an13.13/14.
Das Maximum von $\{|f(x)|;\ x \in K\}$ ist eindeutig bestimmt, kann aber in verschiedenen Stellen $x \in K$ angenommen werden.
Weiter ist $\|\cdot\|_K$ eine Norm. Ü

14.6 Weierstraßscher Approximationssatz (WAS):

Vor.: $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{C})$, $\varepsilon > 0$.

Beh.: $\exists p \in \mathbb{C}[X]: \|f-p\|_K < \varepsilon$.

Einige Vorbereitungen zum Beweis, der in 14.11 geführt wird.

14.7 Def.: Sei $\overline{\mathcal{P}} := \overline{\mathcal{P}(K)} := \{f : K \to \mathbb{R};\ f \text{ stetig},\ \forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{R}[X] : \|f-p\|_K < \varepsilon\}$

die Menge aller (reellen) stetigen Funktionen auf K, die sich auf K beliebig genau durch (reelle) Polynome approximieren lassen.

Zunächst analysieren wir $\overline{\mathcal{P}}$:

14.8 Hilfssatz: $\overline{\mathcal{P}}$ ist eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, d.h. $\overline{\mathcal{P}}$ ist UVR und $f,g \in \overline{\mathcal{P}} \Rightarrow f\cdot g \in \overline{\mathcal{P}}$.

Bew.: $f,g \in \overline{\mathcal{P}}$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists p,q \in \mathbb{R}[X]: \|f-p\|_K < \varepsilon$ und $\|g-q\|_K < \varepsilon$.

Dann: $\|(f+g)-(p+q)\|_K \le \|f-p\|_K + \|g-q\|_K \le 2\varepsilon$, d.h. $f+g \in \overline{\mathcal{P}}$,

und $\|f\cdot g - p\cdot q\|_K \le \|f-p\|_K \cdot \|q\|_K + \|g-q\|_K \cdot \|f\|_K$

$\le \varepsilon(\|q\|_K + \|f\|_K) \le \varepsilon(\varepsilon + \underbrace{\|g\|_K + \|f\|_K}_{\text{beschränkt, s. 14.5.}}) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$. □

14.9 Hilfssatz: $f,g \in \overline{\mathcal{P}} \Rightarrow |f|,\ \max(f,g),\ \min(f,g) \in \overline{\mathcal{P}}$.

Bew.: Es ist $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$,

$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$,

also gen. z.z.: $\overline{\mathcal{P}} \ni |f|$, falls $f \in \overline{\mathcal{P}}$.

Dazu sei OE $f \neq 0 \Rightarrow \|f\|_K \neq 0$, betr. also $\varphi := \frac{f}{\|f\|_K}$, z.z.: $|\varphi| \in \overline{\mathcal{P}}$.

⌈Bem.: $|x| \le 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n}(x^2-1)^n$, dies ist klar für $|x|<1$, vgl. An19.20.

Weiter konvergiert die binomische Reihe gleichmäßig für $|x| \le 1$, weil $\left|\binom{1/2}{n}\right| \le C\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}$.⌋

Hier: $|\varphi| \le 1 \Rightarrow |\varphi| = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(\varphi^2-1)^n$.

Zu $\varepsilon > 0$ ex. Partialsumme P_N davon mit $\||\varphi| - P_N\|_K < \varepsilon$

$\overset{14.8}{\Rightarrow} P_N \in \overline{\mathcal{P}}$, d.h. $\exists p \in \mathbb{R}[X] : \|P_N - p\|_K < \varepsilon$

denn P_N ist endl. Linearkomb. der $(\varphi^2)^j \in \overline{\mathcal{P}}$, $j \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow \||\varphi| - p\|_K < 2\varepsilon$, d.h. $|\varphi| \in \overline{\mathcal{P}}$. □

14.10. **Hilfssatz:** $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, gegebenes $x \in K$, $\varepsilon > 0$.

Beh.: $\exists\, q \in \overline{\mathcal{P}}$: a) $q(x) = f(x)$,
b) $q \le f + \varepsilon$ auf K.

Bew.: $\forall z \in K$ wähle affinlineares $l_z(y) = ay + b$, also $l_z \in \overline{\mathcal{P}}$,
mit $l_z(x) = f(x)$, $l_z(z) = f(z)$.

l_z stetig $\Rightarrow \exists$ offenes IV $I_z \ni z$ mit $l_z \le f + \varepsilon$ auf I_z.

Ferner: $K \subseteq \bigcup_{z \in K} I_z$ ist Überdeckung $\underset{\text{Kkp.}}{\Rightarrow} \exists\, z_1, \dots, z_n : K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_{z_j}$.

Sei $q := \min\{l_{z_j};\ j \in \{1, \dots, n\}\}$. Dann gilt:

q erfüllt a) und b), denn jedes $z \in K$ liegt in einem I_{z_j}.

Ferner $q \in \overline{\mathcal{P}}$ nach Hilfssatz 14.9. □

14.11. **Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes:**

1.Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, d.h. $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt.

$\forall x \in K$ wähle $q_x \in \overline{\mathcal{P}}$ nach Hilfssatz 14.10.

q_x stetig $\Rightarrow \exists$ offenes IV $I_x \ni x$, $f - \varepsilon \le q_x$ auf I_x ⌜wg. 14.10 a)⌟

K kompakt $\Rightarrow \exists\, x_1, \dots, x_n$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_{x_j}$.

Sei $g := \max_{j \in \{1, \dots, n\}} q_{x_j} \Rightarrow g \ge f - \varepsilon$ auf ganz K.

$\overset{14.10\, b)}{\Longrightarrow} g \le f + \varepsilon$, also $\|f - g\|_K \le \varepsilon$, d.h. $g \in \overline{\mathcal{P}}$ nach Hilfssatz 14.9 ⌜$g = \max q_{x_j}$⌟

$\Rightarrow \exists\, p \in \mathcal{P} : \|g - p\|_K < \varepsilon$

$\Rightarrow \|f - p\|_K \le \|f - g\|_K + \|g - p\|_K < 2\varepsilon$.

2.Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, d.h. $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt.

Wähle $u, v \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit $\|\operatorname{Re} f - u\|_K < \varepsilon$ und $\|\operatorname{Im} f - v\|_K < \varepsilon$.

Sei $p := u + iv \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, wo $i = \sqrt{-1}$.

$\Rightarrow \|f - p\|_K \le \|\operatorname{Re} f - u\|_K + \|\operatorname{Im} f - v\|_K < 2\varepsilon$. □

14.12. **Bem.:** Der WAS 14.6. zeigt, dass Potenzreihen gleichmäßig konvergieren auf kompakten Mengen innerhalb des Konvergenzintervalls (Fall $\mathbb{R}$) bzw. Konvergenzkreises (Fall $\mathbb{C}$). Auf dem offenen Kgz. IV/Kreis liegt i.a. keine glm. Kgz. vor.

Der WAS für 2π-periodische Funktionen.

14.12. **Def.:** • f heißt 2π-periodisch $:\Leftrightarrow \forall x: f(x+2\pi)=f(x)$.

• Ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$ ist ein Term von der Form $\underset{T_n(x)}{\underset{\shortparallel}{T(x)}} := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, die $c_k \in \mathbb{C}$.

14.13. Diese bilden einen $\mathbb{C}$-VR und haben eine cos-sin-Darstellung:
Löse Gleichungssystem für a_k, b_k mit $k \geq 1$:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i b_k),$$

also $a_0 = 2c_0$, $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$, es folgt:

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

14.14. **Beh.:** • Die Koeffizienten c_k in T (und damit a_k und b_k) sind eindeutig.

• Konsequenz: T reellwertig $\Leftrightarrow \forall k: \overline{c_k} = c_{-k} \Leftrightarrow \forall k: a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Bew.: • $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(x) e^{-ikx}dx$, da: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-ilx}dx = \begin{cases} 1, & l=k, \\ 0, & l \neq k. \end{cases}$ „Orthogonalitätsrelationen"

• T reellwertig $\Rightarrow \overline{c_k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(x)e^{ikx}dx = c_{-k} \Rightarrow a_k = \operatorname{Re} c_k,\ b_k = \operatorname{Im} c_k$. □

Bem.: $c_k(f)$ heißt Fouriertransformation der 2π-per. Fkt. f

Bem.: Zu f bilde $c_k = c_k(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}$ und das zugeh. $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$ als Approximation an f, erhalten $a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f)$, $b_k(f) = i(c_k(f) - c_{-k}(f))$ dazu.

14.15. WAS für 2π-periodische Funktionen:

Vor.: $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, f 2π-periodisch.

Beh.: $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ trigon. Pol. T: $\|f - T\|_{\sup} < \varepsilon$.

Bew.: Sei $\mathcal{T} := \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, 2π-periodisch, appr'bar durch trigon. Pol.$\}$.

a) $\mathcal{T}$ ist Unteralgebra von $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

b) $f, g \in \mathcal{T} \Rightarrow |f|, \max(f,g), \min(f,g) \in \mathcal{T}$

c) f wie in WAS, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists T \in \mathcal{T}$: $\alpha)$ $T(x) = f(x)$, $\beta)$ $T \leq f + \varepsilon$ auf $\mathbb{R}$

Hier: ersetze l_z durch trigon. Pol. L_z mit $L_z(x) = f(x)$, $L_z(z) = f(z)$.

Beweis dann analog wie in 14.11. □

Bem.: Dieser Satz ist der Ausgangspunkt der Theorie der Fourierreihen, man kommt so zur Fourieranalysis, ein Teilgebiet der Analysis, wo trigonometrische Approximationen untersucht werden. Die Fourieranalysis ist auch in physikalischen Anwendungen von Bedeutung.

Eine mathematische Anwendung der Fourierreihentheorie:

14.16. Bsp.: Sei $f(x)=|x|$ für $-\pi\le x\le\pi$, setze dies 2π-periodisch fort. Aus 14.13 erhalten wir die Fourierreihe $S_\infty f(x):=\lim_{n\to\infty}T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^\infty(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$.
Da f gerade, sind alle $b_k(f)=0$, $a_k(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{x}_{=f(x)}\cos(kx)\,dx$, $a_0=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\pi$ ⌜14.13/14⌟
und für $k\ge1$ ist

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(kx)\,dx \overset{\text{part.}\int}{=}\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{k}\sin(kx)\Big|_0^\pi-\frac{1}{k}\int_0^\pi\sin(kx)\,dx\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k^2}\cos(kx)\Big|_0^\pi=\frac{2}{\pi k^2}(-1+(-1)^k)=\begin{cases}-\frac{4}{\pi k^2}, & 2\nmid k,\\ 0, & 2\mid k.\end{cases}$$

$$\Rightarrow S_\infty f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2},$$ ist glm. Kgt. auf $\mathbb{R}$ und somit stetig.
⌜nach An18.9(b)⌟

Nach dem Darstellungssatz 14.18 Kgt. $S_\infty f$ glm. gegen f.
Für $x=0$ erhält man eine Gleichung für π,
nämlich $\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Daraus folgt $\boxed{\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$, denn $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}+\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(2n+1)^2}$
$\Rightarrow \frac{3}{4}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$ $\Rightarrow\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}$.

14.17. Identitätssatz für Fourierreihen:
Vor.: $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, f,g 2π-periodisch und integrierbar auf $[0,2\pi]$, stetig und mit gleichen Fourierkoeffizienten. Beh.: $f=g$.
Bew.: $h:=f-g$ hat laut Vor. die FourierKoeff. 0, dann folgt $h\overset{!}{=}0$,
denn: $T_n(x)=\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}\Rightarrow\int_0^{2\pi}h\overline{T_n}(x)\,dx=\sum_{k=-n}^n\overline{c_k}\underbrace{\int_0^{2\pi}h\,e^{-ikx}dx}_{=0}=0$.
Laut WAS 14.15 folgt: $\exists(T_n)\Rightarrow h$
$\Rightarrow\int_0^{2\pi}|h|^2dx\underset{\text{An18.9(a)}}{=}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}h\overline{T_n}\,dx=0$. Da h stetig, ist $\bar h$ und $|h|^2$ stetig.
Wäre $h\neq0$, folgte $\int_0^{2\pi}|h|^2dx>0$ ↯. □

14.18 Darstellungssatz: Vor.: f wie in 14.17, $S_\infty f$ Kgt. glm. Beh.: $S_\infty f\Rightarrow f$.
Bew.: Sei $g(x):=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}=S_\infty f(x)$. Nach An18.9(b) ist g stetig.
Ferner ist der ℓ-te FourierKoeff. von g gleich $\frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^n c_k\underbrace{\int_0^{2\pi}e^{ikx}e^{-i\ell x}dx}_{=2\pi\delta_{k,\ell}}=c_\ell$,
dem ℓ-ten FourierKoeff. von f. Mit 14.17 folgt $f=g$. □