Vorlesung Analysis II

SoSe '25 hhu
K. Halupczok

Teil 2: Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen

an15: Zusammenhang in metrischen Räumen

Stichworte: zusammenhängend (zush.) $\Leftrightarrow$ wegzush. $\Leftarrow$ polygonal zush.

Literatur: [Königsberger], Kapitel 1.5

15.1. Einleitung: Der Begriff "zusammenhängend" wird für metrische Räume definiert und mit "wegzusammenhängend" und "polygonal zusammenhängend" identifiziert, was über "Verbindungen" zwischen zwei Punkten erklärt wird.

15.2. Motivation: Es ist zunächst leichter zu definieren, was "nicht zusammenhängend" ist.

15.3. Vereinbarung: (R, δ) sei metrischer Raum, $M \subseteq R$,
damit ist $(M, \delta_{\restriction M\times M})$ metrischer Raum.

15.4. Def.: R heißt nicht zusammenhängend (kurz: zush.)
$$:\Leftrightarrow \exists\, O_1, O_2 \subset R,\quad O_1 \neq \emptyset \neq O_2 : R = O_1 \,\dot\cup\, O_2$$
R heißt zush. $:\Leftrightarrow$ R nicht nicht zush.
M heißt zush. $:\Leftrightarrow$ $(M, \delta_{\restriction M\times M})$ zush.

15.5. Satz: Vor.: $R \xrightarrow{f} S$ stetig, R, S metrische Räume, R zush.
Beh.: $f(R)$ zush. "Bilder zush. Mengen sind zush."

Bew.: Ann.: $f(R) = S_1 \cup S_2$ mit $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1, S_2 \subset f(R)$,
d.h. $\exists\, O_1, O_2 \subset S$ mit $S_1 = O_1 \cap f(R)$, $S_2 = O_2 \cap f(R)$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
Betr. $f^{-1}(S_1 \cup S_2) = f^{-1}(O_1 \cup O_2) = f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2)$ offen, $= R$.
Da R zush., folgt $f^{-1}(O_1) = \emptyset$ oder $f^{-1}(O_2) = \emptyset$, d.h. $S_1 = \emptyset \vee S_2 = \emptyset$,
so dass also $f(R)$ zush. ist. $\square$

15.6. Hilfssatz ⊛: R zush. $\iff$ Jede stetige Abb. $f: R \to \mathbb{Z}$ ist konstant.

Bew.: „$\Rightarrow$": Nach 15.5. ist $f(R)$ zush. Teilmenge von $\mathbb{Z}$.

Da jede Teilmenge von $\mathbb{Z}$ offen (in $\mathbb{Z}$) ist, sind Teilmengen von $\mathbb{Z}$ mit ≥ 2 El. nicht zush.

$\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{Z}: f(R) = \{a\}$, d.h. f ist konstant.

„$\Leftarrow$": Sei jede stetige Abb. $R \to \mathbb{Z}$ konstant.

z.z.: $\forall X \in \mathcal{O}(R),\ \emptyset \neq X \neq R:\ R \setminus X \notin \mathcal{O}(R)$.

Dazu sei X so, betr. $f_X: R \to \mathbb{Z}$, $f_X(x) := \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \in R\setminus X \end{cases}$, also ist f_X unstetig, da nicht konstant.

Daher ex. $U \in \mathcal{O}(\mathbb{Z}): f_X^{-1}(U) =: A$ nicht offen, z.z.: $R \setminus X = A$ nicht offen.

Sei dann OE $U = \{0,1\}$. 1.) Haben $U \neq \emptyset$, sonst $A = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ offen ↯.

2.) Haben $U \neq \{0,1\}$, sonst $A = f^{-1}(\{0,1\}) = R$ offen ↯.

3.) Haben $U \neq \{1\}$, sonst $A = f^{-1}(\{1\}) = X$ offen ↯.

4.) Also notwendig $U = \{0\}$, dann ist $R \setminus X = f^{-1}(\{0\}) = A$ nicht offen. □

Betr. ab jetzt den Spezialfall $R = \mathbb{R}^n$ und eine Metrik ρ (von Norm induziert):

15.7. Def.: $M \subset \mathbb{R}^n$, M zush. $:\iff$ M Gebiet,

d.h. wir nennen eine offene zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

15.8. Def.: M wegzush. $:\iff \forall a,b \in M\ \exists\, \varphi: [u,v] \to M$ stetig mit $\varphi(u) = a$, $\varphi(v) = b$,

wo $[u,v] \subseteq \mathbb{R}$, z.B. $u = 0$, $v = 1$. (φ heißt Weg von a nach b.)

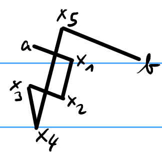
15.9. Bsp.: Eine Strecke $\overline{ab} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\overline{ab} = \{\varphi(t);\ t \in [0,1]\}$ mit der

stetigen Fkt. $\varphi(t) := a + t(b-a)$, wo $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.

Damit ist z.B. $\mathbb{R}^n$ wegzush.

15.10. Bem.: • Jede konvexe Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist wegzush. (vgl. Def. in an6.3)

• Insb. ist jede Kugel $B_a^\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^n$ wegzush., da konvex.



15.11. Def.: M polygonzush. $:\iff \forall a,b \in M:\ \exists\, a = x_0, x_1, \ldots, x_m = b \in M:$

$\forall j \in \{0,\ldots,m-1\}:\ \overline{x_j x_{j+1}} \subseteq M$,

$\iff \forall a,b \in M\ \exists\, x_1,\ldots,x_{m-1} \in M:\ \overline{ax_1}, \overline{x_1x_2}, \ldots, \overline{x_{m-1}b} \in M$.

Man nennt eine solche Folge $a, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, b$ oder auch $\overline{ax_1} \cup \overline{x_1x_2} \cup \ldots \cup \overline{x_{m-1}b}$

einen Streckenzug oder Polygonzug.

15.12. **Satz**: Vor.: $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Beh.: M Gebiet $\Leftrightarrow$ M polygonzush. $\Leftrightarrow$ M wegzush.

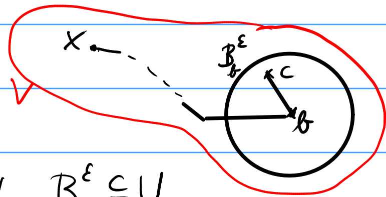
Bew. (durch Ringschluss):

i) Z.z.: M Gebiet $\Rightarrow M$ polygonzush.:

Sei $x \in M$ bel. Setze $V = V_x := \{ b \in M;\ b$ mit x durch Polygonzug verbindbar$\}$

$= \{ b \in M;\ \exists\, x_1, \dots, x_k \in M : \overline{bx_1} \cup \overline{x_1x_2} \cup \dots \cup \overline{x_k x} \subseteq M \}$.

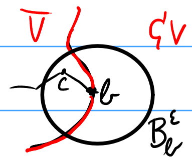
Da $x \in V$, ist $V \neq \emptyset$.



• Haben: V ist offen, d.h. $b \in V \overset{!}{\Rightarrow} \exists\, B_b^\varepsilon \subseteq V$.

Denn: M offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B_b^\varepsilon \subseteq M$.

Sei $c \in B_b^\varepsilon$. Wegen $\overline{bc} \subseteq B_b^\varepsilon$ folgt dann $c \in V$, d.h. $B_b^\varepsilon \subseteq V$.



• Haben: V ist abg., d.h. $\complement V$ ist offen.

Dazu betr. $B_b^\varepsilon \subseteq M$ für $b \in \dot{V}$.

Haben $B_b^\varepsilon \setminus \{b\} \cap V \neq \emptyset$, wähle $c \in V \cap B_b^\varepsilon$, $c \neq b$

$\Rightarrow \overline{bc} \subseteq B_b^\varepsilon \overset{\text{Def. } V}{\Rightarrow} b \in V$. Es folgt $\overline{V} = V \cup \dot{V} \subseteq V$, also $\overline{V} = V$, d.h. V ist abg.

ii): M polygonzush. $\Rightarrow M$ wegzush.: trivial, da Streckenzüge Wege sind.

iii): M wegzush. $\Rightarrow M$ Gebiet:

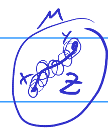
Zeige: M zush. $\Leftarrow \forall\, x, y \in M\ \exists\, Z \subseteq M : x, y \in Z$, Z zush.

Sei $f: M \to \mathbb{Z}$ stetig, $y \in M$. Ist $x \in M$ bel., so gibt es ein $Z \subseteq M$, Z zush., $x, y \in Z$, nach Vor.

Betr. $f|_Z$. Diese Abb. ist stetig, und da Z zush. ist, ist $f|_Z$ konstant nach Hilfssatz ⊛ 15.6. „$\Rightarrow$".

Es folgt $f(x) = f(y)$. Da $x, y \in M$ bel., ist f auf M konstant.

Mit Hilfssatz ⊛ 15.6. „$\Leftarrow$" folgt: M zush.



Mit dieser Beh. folgt iii), denn von x nach y führt ein Weg in M. Um jeden Punkt des Weges wähle eine ε-Umg. ganz in M. Setze Z als Vereinigung aller dieser ε-Umg. □

Ü Eine Vereinigung nichtdisjunkter zush. Mengen ist zush.

15.13. **Kor.:** $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^1$: M zush. $\Leftrightarrow$ M Intervall.
[denn IVe in $\mathbb{R}^1$ sind per Def. wegzusammenhängend]

15.14. **Kor.:** $f: R \to \mathbb{R}^1$ stetig, R zush. $\overset{15.6.}{\Rightarrow}$ $f(R)$ zush. $\overset{15.4.}{\Rightarrow}$ $f(R)$ Intervall.
Vgl. dies mit dem Satz vom Min./Max. An 9.30., es folgt der ZWS An 9.29.

15.15. **Bem.:** Die Relation $x \sim y :\Leftrightarrow \exists Z \subseteq M$, Z zush.: $x, y \in Z$
ist auf $M \subseteq R$ (R ein metrischer Raum) eine Äquivalenzrelation [reflexiv, symmetrisch, transitiv] auf M.
Haben auch $x \sim y \Leftrightarrow x \in V_y \Leftrightarrow y \in V_x$ laut Beweis von 15.12 in $R = \mathbb{R}^n$.
Die Äquivalenzklassen sind zush. und abg. Da M disjunkte Vereinigung dieser Ä-Klassen ist, heißen diese die Zusammenhangskomponenten von M.
Schränkt man eine stetige Fkt. $f: M \to \mathbb{Z}$ ein auf eine Zush.Komponente U, so ist $f_{|U}$ konstant laut 15.6., und die Urbilder einpunktiger Mengen $\{a\} \subseteq \mathbb{Z}$ sind Vereinigungen von Zusammenhangskomponenten von M.