Vorlesung Analysis II

SoSe '25 hhu

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

K. Halupczok

an16: Differentialgleichungen und Richtungsfelder

Stichworte: DGL, gewöhnliche DGL, Lösungsfunktion, Fragestellungen, Richtungsfelder

Literatur: [Hoffmann], Kapitel 7.1

16.1. Einleitung: Wir geben die Definition einer Differentialgleichung als Funktionalglg. zwischen gesuchter Fkt. $y = y(x)$, der Variablen x und Ableitungen von y.

16.2. Motivation: Gleichungen mit einer Funktion y und ihrer Ableitungen $y', y'', \dots$ nennt man Differentialgleichungen. Wir möchten solche nach y "auflösen", also Methoden zum Auffinden der Lösungsfunktionen für y erarbeiten. Darin soll y in nur einer reellen Variablen x erklärt sein. Wir schreiben kurz DGL für "Differentialgleichung".

16.3. Def.: Sei $k \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{k+1}$, $F : D \to \mathbb{C}$.
Dann heißt eine Glg. der Form

$$\circledast \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung. (Identifiziere $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$)

16.4. Gesucht: ein IV $j \subseteq \mathbb{R}$, $y : j \to \mathbb{C}$ k-mal diff'bar
mit: $\forall x \in j : (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)) \in D$
und $\forall x \in j : F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)) = 0$.

16.5. Bez.: 1) y heißt dann eine Lösung von $\circledast$ (in j), Kurz: Lsg.
man sagt, y "erfüllt die" DGL oder "genügt der" DGL.

2) kann $\circledast$ speziell in der Form $y^{(k)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})$ geschrieben werden, dann heißt die DGL explizit, und k heißt die Ordnung der DGL.

16.6. Bsp.: $y' = 10y$ ist explizit von 1. Ordnung, eine Lsg. $\neq 0$ ist $y(x) = 163e^{10x}$.

16.7. **Fragen:** 1. Existiert eine Lsg.? Existiert eine "lokale" Lsg.?
2. Falls ja: Wie gewinnt man eine Lsg.?
3. Falls ja: Eindeutigkeit?
4. Maximale Lsg.? (bzgl. Fortsetzung der Def.menge J)
5. Abhängigkeit der Lsgn. von Parametern?
6. Charakterisierung der Lsgn.?

Zu 1./2.: Bsp. unlösbare DGL: $(y')^2 + 1 = 0$
Bsp. lösbare DGL: $y' = \varphi(x) \Rightarrow y(x) = \int^x \varphi(x)\,dx$ Stammfkt. von φ, nicht immer leicht!

Zu 3.: Eindeutigkeit ist i.a. sinnvoll bei Vorgabe von Anfangswerten, man spricht von Anfangswertaufgaben (AWA), auch: von Anfangswertproblemen (AWP).

- Bsp.: $y' = 10y$ kann unter Vorgabe von $y(0) = 163$ eindeutig gelöst werden, diese ist dann $y(x) = 163\, e^{10x}$.
- Bsp.: $y' = \sqrt{y}$ $(y \geq 0)$ hat unter Vorgabe von $y(0) = 0$ (lokal) unendl. viele Lsgn., vgl. Bsp. 17.10.

Man zeigt weitreichende Existenz- und Eindeutigkeitssätze, etwa den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf (davon gibt es eine globale und eine lokale Version).

Zu 4.: Die Aufgabenstellung fragt nicht nach "Größe" von J. Interessant sind Lösungen auf möglichst großem Intervall J.
Bsp.: $y' = y^2$, $y(0) = c > 0$, hier kann die Existenz nur "lokal" gesichert werden, vgl. Bsp. 17.12.

Zu 5.: Die Abhängigkeit der Lösungen von Eingabedaten ist relevant.

Zu 6.: Man sucht nach strukturellen Eigenschaften der Lösungsmenge.

Veranschaulichung durch Richtungsfelder (für explizite DGL 1. Ordnung):

Vereinbarung: Betr. die DGL (#) $\boxed{y' = \varphi(x,y)}$.

Interpretation: φ ordnet jedem Punkt $(x,y) \in \mathcal{D}$, wo $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, eine Steigung/Richtung zu.

Graphisch: Zeichne in (x,y) ein kleines Geradenstück dieser Richtung ein ("Linienelemente")
Das Ergebnis im Koordinatensystem ist ein Richtungsfeld.
$\leadsto$ Kurven, die in jedem (x,y) das dortige (vorgegebene) Linienelement als Tangente haben, entsprechen Lösungen der DGL.

Bsp.: $y' = y - x^2$, Bild s. [Hoffmann, S. 236 in §7.1] / Tafelbild

Bsp.: $y' = \frac{1}{2} y$ (die r. S. φ hängt nur von y ab),

Bild s. [Hoffmann, S. 236 in §7.1] / Tafelbild

Bsp.: $y' = -\frac{x}{y}$, $y(a) = b > 0$, hat als Lösungen Halbkreise $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r < x < r$, wo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bild s. [Hoffmann, S. 237 in §7.1] / Tafelbild

Bsp.: $y' = \frac{x}{y}$, $x > 0$, $y(a) = b$, wo $a > 0$, hat als Lösungen Halbgeraden $y(x) = \frac{b}{a} x$, $x > 0$.

Bild s. [Hoffmann, S. 237 in §7.1] / Tafelbild