

Vorlesung Analysis II

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

SoSe '25 hhu

K. Halupczok

an17: DGLn mit „getrennten Variablen“

Stichworte: DGL mit getrennten Variablen, AWA, Beispiele

Literatur: [Hoffmann], Kapitel 7.2

17.1. Einleitung: Wir untersuchen DGLn mit „getrennten Variablen“ x und y .

17.2. Motivation: Wir behandeln DGLn, wo sich alle Terme mit y und ihren Ableitungen auf die eine Seite, und die Terme mit x auf die andere Seite bringen lassen.
Nach einer solchen „Variablentrennung“ ist die DGL leicht lösbar durch Integration.

17.3. Vereinbarung: Wir betrachten DGLn der Form

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \textcircled{*}$$

Annahmen: $i_1, i_2 \in \mathbb{R}$ Intervalle,

$f: i_1 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g: i_2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g(s) \neq 0$ für $s \in i_2$.

17.4. Aufgabe: Zu den Anfangswerten $a \in i_1$ und $b \in i_2$ suchen wir ein IV $i \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in i \subseteq i_1$ und eine auf i def. Lsg. y von $\textcircled{*}$ mit $y(a) = b$.

„AWA“ = Anfangswertaufgabe

17.5. Große Idee: Umformung zu $y'(t) g(y(t)) = f(t)$

und Integration: $\int_a^x y'(t) g(y(t)) dt = \int_a^x f(t) dt$

Die Substitution $s := y(t)$ ergibt auf der l.S. gerade $\int_{y(a)}^{y(x)} g(s) ds$,
was dann nach $y(x)$ aufgelöst wird.

17.6. Bemerkungen:

1.) Durch „Variation“ von a und b werden alle Lsgn. erfasst.

2.) Eine Lsg. von $\textcircled{*}$ ist automatisch stetig diff'bar.

17.7. Setze $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ ($x \in i_1$), $G(y) := \int_b^y g(s) ds$ ($y \in i_2$).

Da g in i_2 keine Nst. hat (und daher konstantes VZ hat, denn g ist stetig), ist G streng monoton (isoton oder antiton).

G ist stetig diff'bar, für $i_3 := G(i_2)$ ist also $G: i_2 \rightarrow i_3$ bijektiv.

Nach An12.2./an8.8 ist $G^{-1}: i_3 \rightarrow i_2$ stetig diff'bar, und ebenso streng monoton.

17.8. Feststellung: Für eine auf einem IV i , $a \in i \subseteq i_1$, def. diff'bare Fkt. y mit $y(t) \in i_2$ ($t \in i$) ist die AWA äquivalent zu

$$G(y(x)) = F(x), \quad x \in i. \quad (\Leftrightarrow) \quad y(x) = G^{-1}(F(x)) = (G^{-1} \circ F)(x), \quad x \in i.$$

Ist nun i_0 das „maximale“ IV mit $a \in i_0 \subseteq i_1$ und $F(x) \in i_3$, $x \in i_0$,

dann gilt: $y_0 := G^{-1} \circ F|_{i_0}$ ist Lsg. der AWA.

Jede andere Lsg. der AWA entsteht durch Einschränkung.

17.9. Bsp.: $y' = -\frac{x}{y}$, $y > 0$. $\leadsto$ Nehmen $i_1 = \mathbb{R}$, $f(x) = -x$, $i_2 =]0, \infty[$, $g(y) = y$ und bel. $a \in i_1, b \in i_2$, erhalten: $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + a^2$, $G(y) = \frac{1}{2}y^2 - b^2$, und somit $i_3 = G(i_2) =]-\frac{1}{2}b^2, \infty[$. Mit $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ergibt sich $i_0 =]-r, r[$. Die Forderung $G(y(x)) = F(x)$ liefert $y(x)^2 - b^2 = -x^2 + a^2 \Rightarrow y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in i_0$.

17.10. Bsp.: $y' = \sqrt{y}$, $y \geq 0$, $y(0) = 0 \leadsto$ Nehmen $i_1 = \mathbb{R}$, $i_2 =]0, \infty[$, $f(x) := 1$ ($x \in i_1$), $g(s) := s^{-1/2}$ ($s \in i_2$).

• Für $b = 0$ sind wegen $0 \notin i_2$ obige Überlegungen nicht anwendbar.

• Falls $a \in i_1$, $b \in i_2$: Setze $F(x) := \int_a^x f(t) dt = x - a$, $x \in i_1$,

$$G(y) := \int_b^y s^{-1/2} ds = 2(\sqrt{y} - \sqrt{b}), \quad y \in i_2,$$

$$i_3 (:= G(i_2)) =]-2\sqrt{b}, \infty[, \quad i_0 =]a - 2\sqrt{b}, \infty[,$$

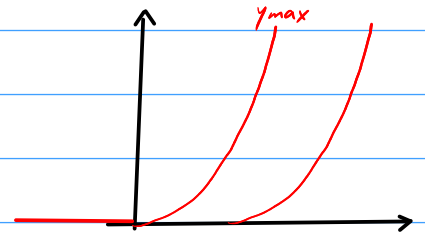
$$y_0(x) := G^{-1}(F(x)) = \frac{1}{4}(x - a + 2\sqrt{b})^2, \quad x \in i_0.$$

Andererseits ist offenbar $y_{\min}(x) := 0$, $x \in \mathbb{R}$, Lsg. in i_1 .

Mit $\alpha := a - 2\sqrt{b}$ liefert dann $y(x) := \begin{cases} 0, & x \leq \alpha \\ \frac{1}{4}(x - \alpha)^2, & x > \alpha \end{cases}$ eine Lsg. auf ganz $\mathbb{R}$.

17.11. Bem. zu 17.10: Falls $\alpha \geq 0$, erhält man eine Lsg.

Es ex. also lokal (hier z.B. um die 0 herum) unendl. viele Lsgn. der AWA, diese liegen zwischen der "kleinsten" Lsg. $y_{\min} \equiv 0$ und der "größten" Lsg. $y_{\max}(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & x > 0. \end{cases}$



17.12. Bsp.: $y' = y^2$, $y(0) = b > 0$. $\leadsto$ Nehmen $i_1 = \mathbb{R}$, $i_2 =]0, \infty[$,
 $f(x) = 1$ ($x \in i_1$), $g(s) = s^{-2}$ ($s \in i_2$), $a = 0$.

Setzen $F(x) = \int_0^x f(t) dt = x$, $x \in i_1$,

$G(y) = \int_b^y g(s) ds = \frac{1}{b} - \frac{1}{y}$, $y \in i_2$,

$i_3 = G(i_2) =]-\infty, \frac{1}{b}] = i_0$,

$y_0(x) := G^{-1}(F(x)) = G^{-1}(x) = \frac{b}{1-bx}$,
 $x \in i_0$.

Beachten: Die Lsgn. besitzen individuelle maximale Existenz ILe, obwohl die DGL mit völlig regulären Funktionen gebildet wird.

