Vorlesung Analysis II — SoSe '25 hhu

K. Halupczok

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

an18: Lineare DGL 1. Ordnung

Stichworte: Variation der Konstanten, zugeh. homogene DGL, partikuläre Lsg.

Literatur: [Hoffmann], Kapitel 7.3

18.1. Einleitung: Bereits die einfache DGL $y' = \alpha y$ beschreibt exponentielles Verhalten (Wachstum für $\alpha > 0$, Zerfall für $\alpha < 0$), in vielen Anwendungen ein Standardkonzept. Wir behandeln die DGL $y' = f(x)y + g(x)$ als Verallgemeinerung dieser Form.

18.2. Motivation: Die lineare DGL 1. Ordnung wird untersucht.

18.3. Vereinbarung: Betr. die DGL $\boxed{y' = f(x)y + g(x)}$ $\circledast$.

wo $f, g : J \to \mathbb{R}$ stetig, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein IV. Die r.S. ist linear in y.

18.4. Bem.: Für $a \in J$ wird durch $y_0(x) := \exp\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)$, $x \in J$, eine Lsg. y_0 der zugehörigen homogenen (linearen) DGL $\boxed{y' = f(x)y}$ $\circledast_h$ auf J erklärt, die $y_0(x) \neq 0$, $y_0(a) = 1$ erfüllt.

18.5. Satz: • Für $a \in J$ und $b \in \mathbb{R}$ ist die (eindeutig bestimmte) Lsg. y von $\circledast$ auf J mit $y(a) = b$ gegeben durch

$$y(x) = y_0(x) \cdot \left(\int_a^x g(t) y_0(t)^{-1}\,dt + b \right). \quad \oplus$$

• Sämtliche Lösungen von $\circledast$ erhält man durch Variation von a und b (d.h. $a = a(x)$, $b = b(x)$) und Einschränkung auf Teilintervalle.

Beweis: • Sei y eine Lsg. von ⊛ in einem IV j_0 mit $a \in j_0 \subseteq j$
und $y(a) = b \in \mathbb{R}$. Wir schreiben y in der Form
$$y(x) = c(x)\, y_0(x), \quad x \in j_0, \qquad \text{„Variation der Konstanten"}$$
mit $c: j_0 \to \mathbb{R}$, c (stetig) diff'bar
(die Glg. kann als Def. für c gelesen werden).

Nehmen wir diese Form $y = c y_0$ an, dann gilt damit
$$f c y_0 + g = f y + g = y' = c' y_0 + c y_0' = c' y_0 + c f y_0$$
$$\Rightarrow \quad c'(t) = g(t)\, y_0(t)^{-1},$$
somit ist notwendig
$$y(x) = y_0(x) \cdot \Big(\int_a^x g(t) \underbrace{y_0(t)^{-1}}_{= \frac{1}{y_0(t)}} dt + b \Big), \quad \text{d.h. } ⊕.$$
• Andererseits wird durch ⊕
eine Lsg. von ⊛ mit $y(a) = b$ erklärt. □

18.6. **Folgerung:** (a) Für die zugeh. homogene DGL $⊛_h$ sind alle Lsgn. auf j
gegeben durch $y(x) = b\, y_0(x)$, $x \in j$, $b \in \mathbb{R}$.
(b) Für eine Lsg. y der homogenen DGL $⊛_h$ gilt: $y \neq 0 \Rightarrow \forall x \in j: y(x) \neq 0$.
⊛ ohne AWA → (c) Jede bel. Lsg. von ⊛ auf j entsteht aus einer speziellen
(„partikulären") Lsg. durch Addition einer Lsg. der homogenen DGL $⊛_h$.

Bew.: (a): direkt ablesbar aus ⊕ mit $g(t) := 0$, $t \in j$.
(b): aus (a), da $y_0(x) \neq 0$ für $x \in j$.
(c): aus der Linearität der Ableitung folgt:
Sind y, z Lsgn. von ⊛, so gilt $(y-z)' = y' - z' = f(y) - f(z) \overset{f \text{ linear}}{=} f(y-z)$.
Also ist $y - z$ Lsg. von $⊛_h$, und $y = z + (y-z)$ die gewünschte Darstellung.
Ohne Vor. „f linear": Sei $H(x) = \int_a^x \frac{g(t)}{y_0(t)} dt$, dann ist $y - z = y_0(H(x) + b) - y_0(H(x) + \tilde{b})$
$= y_0(b - \tilde{b}) \Rightarrow y = z + y_0(b - \tilde{b})$, und $(y_0(b - \tilde{b}))' = y_0' \cdot (b - \tilde{b}) = f(x)\, y_0(b - \tilde{b})$.
□

Die hier enthaltenen Linearitätsüberlegungen sind aus der Linearen Algebra
bereits bei der Lösung linearer Gleichungssysteme bekannt:

18.7. **Bem.:** (a) u, v Lsgn. von $\circledast_h$ $\Rightarrow$ $\alpha u + \beta v$ Lsg. von $\circledast_h$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
(b) u Lsg. von $\circledast$ $\wedge$ v Lsg. von $\circledast_h$ $\Rightarrow$ $u + v$ Lsg. von $\circledast$
(c) u, v Lsgn. von $\circledast$ $\Rightarrow$ $u - v$ Lsg. von $\circledast_h$

Die Beh. (a) zeigt, dass die Menge der Lsgn. der homogenen DGL $\circledast_h$ bereits einen $\mathbb{R}$-Vektorraum liefert. **Bew.:** (c): siehe 18.6.(c).

Bew.: (a), (b): ebenso aus der Linearität der Ableitung und von f:

(a): $(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v' = \alpha f(u) + \beta f(v) \overset{f}{=} f(\alpha u + \beta v)$,

(b): $(u+v)' = u' + v' = (f(u) + g) + f(v) \overset{f}{=} f(u+v) + g$.

Ohne Vor. "f linear": (a): $\alpha u + \beta v = \alpha y_0 b + \beta y_0 \tilde{b} = y_0 (\alpha b + \beta \tilde{b})$ löst $\circledast_h$,
(b): $u + v = y_0(H(x) + b)) + y_0 \tilde{b} = y_0(H(x) + (b + \tilde{b}))$ löst $\circledast$. □

18.8. **Bsp.:** DGL $\boxed{y' = -xy + 3x}$, $y(0) = 5$.

- Zur Lsg. dieser AWA ist in Satz 18.5 zu setzen:

$j := \mathbb{R}$, $a := 0$, $b := 5$, $f(x) := -x$, $g(x) := 3x$.

Es ergibt sich: $y_0(x) := \exp(\int_0^x (-t)\,dt) = \exp(-\frac{1}{2}x^2)$,

$y(x) := y_0(x) \cdot (\int_0^x 3t \exp(+\frac{1}{2}t^2)\,dt + 5) = y_0(x) \cdot (3\exp(\frac{1}{2}x^2) + 2)$,

wegen $\int_0^x 3t \exp(\frac{1}{2}t^2)\,dt = 3\exp(\frac{1}{2}t^2)\Big|_0^x = 3(\exp(\frac{1}{2}x^2) - 1)$.

Daher ist $y(x) = 3 + 2\exp(-\frac{1}{2}x^2)$ die eindeutig bestimmte Lsg. der AWA.

- Dieselbe AWA direkt mit "Variation der Konstanten" gelöst (ohne Formel ⊕):

$y_0(x) = \exp(-\frac{1}{2}x^2)$ erfüllt $y_0' = -xy_0$, $y_0(0) = 1$.

Der Ansatz $y(x) = c(x)\, y_0(x)$ liefert

$$-x(cy_0) + 3x = -xy + 3x = y' = c'y_0 + cy_0' = c'y_0 + c(-xy_0)$$
$$\Rightarrow c'y_0 = 3x \Rightarrow c'(x) = 3x\exp(\tfrac{1}{2}x^2).$$

Daraus folgt $c(x) = 3\exp(\frac{1}{2}x^2) + \alpha$. Die Anfangswertbedingung $c(0) = y(0) = 5$ gibt dann $\alpha = 2$, zusammen also wieder die Lsg. $y(x) = 3 + 2\exp(-\frac{1}{2}x^2)$.

- Oft ist es noch einfacher, eine Lsg. von ⊛ zu erraten und dann mit Satz 18.6.(c) (und (a)) die allgemeine Lsg. zu notieren:

Schreibt man die geg. DGL in der Form $y' = x(-y+3)$, so erkennt man leicht die konstante Fkt. $y_p(x) := 3$ als partikuläre Lösung.

Mit der oben schon bestimmten Lsg. y_0 der zugeh. homogenen DGL ist die allgemeine Lösung (nach Satz 18.6(a) und (c)) dann

$$y(x) = b\,y_0(x) + y_p(x) = b\exp\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right) + 3, \quad \text{mit } b \in \mathbb{R} \text{ bel.}$$

Die Forderung $y(0) = 5$ zeigt dann abschließend $b = 2$.