Vorlesung Analysis II — SoSe '25 hhu

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen — K. Halupczok

an19: Bernoullische und Euler-homogene DGL

Stichworte: Bernoullische DGL, (Euler-)homogene DGL

Literatur: [Hoffmann], Kapitel 7.4/5

19.1. **Einleitung:** Die Bernoullische DGL ist eine spezielle Version der linearen DGL 1. Ordnung und wird darauf zurückgeführt.
Die Euler-homogene DGL ist eine DGL 1. Ordnung mit einem Term abhängig von $\frac{y}{x}$ auf der rechten Seite und kann auf eine DGL mit getrennten Variablen zurückgeführt werden.

19.2. **Def.:** Die DGL $\boxed{y' = f(x)y + g(x)y^\alpha}$ ⊛, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$,
heißt Bernoullische DGL, wobei $f, g: J \to \mathbb{R}$ stetig, J ein IV.
(Für $\alpha = 1$ ist dies eine homogene lineare DGL 1. Ordnung,
für $\alpha = 0$ die (inhomogene) lineare DGL 1. Ordnung.)

19.3. **Vereinbarung:** Betrachten nur Lösungen $y: J_0 \to \mathbb{R}$, $J_0 \subseteq J$ Teil-IV mit $y(x) > 0$ für $x \in J_0$.
(Für spezielle α ginge es, auch $y(x) \leq 0$ zuzulassen.
Sofern $0^\alpha = 0$ definiert ist, ist auch $y = 0$ Lösung.)

19.4. **Satz:** Die Transformation $u(x) = y(x)^{1-\alpha}$, $x \in J_0$,
liefert: y Lsg. von ⊛ $\iff$ u löst auf J_0 die lineare DGL
$\boxed{u' = (1-\alpha) f(x) u + (1-\alpha) g(x)}$ ⊕, $u(x) > 0$, $x \in J_0$.

19.5. **Bew.:** „$\Rightarrow$": Ist y Lsg. von ⊛, dann gilt für u:
$$u' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y' = (1-\alpha) y^{-\alpha} \left[f(x) y + g(x) y^\alpha \right]$$
$$= (1-\alpha) f(x) u + (1-\alpha) g(x).$$

„$\subseteq$": Ist u Lsg. von $\oplus$, folgt

$$y' = \frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{1}{1-\alpha}-1} u' = \frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left[(1-\alpha) f(x) u + (1-\alpha) g(x) \right]$$
$$= f(x) u^{\frac{1}{1-\alpha}} + g(x) u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = f(x) y + g(x) x^{\alpha}.$$

$\square$

19.6. Bsp.: $y' = xy - 3xy^2$, $y(0) = \frac{1}{4}$.

Mit $\alpha = 2$, $u(x) = y(x)^{-1} = \frac{1}{y(x)}$ in einem IV $J_0 \subseteq \mathbb{R}$, $0 \in J_0$, $y(x) > 0$ für $x \in J_0$ transformieren wir die DGL um in

$u' = -xu + 3x$, $u(0) = 4$. ⌜$u' = \left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{xy}{y^2} + 3x = -xu + 3x$⌟

Nach Bsp. 18.8. ist $u(x) = b \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + 3$ die allg. Lsg. dieser DGL, die Lösung der ursprünglichen DGL für y ist dann $y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{3 + \exp(-x^2/2)}$.

⌜$y(0) = \frac{1}{4}$ ✓⌟

19.7. Def.: Die DGL $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$ $\circledast$

wird meist als „homogene" DGL bezeichnet.

Um Verwechslungen mit Homogenität bei linearen DGLn auszuschließen, nennen wir sie Euler-homogene DGL.

19.8. Verfahren: Die Substitution $u = \frac{y}{x}$ für $x \neq 0$ bzw. $y = xu$ liefert $f(u) = u + xu'$, also $u' = \frac{f(u) - u}{x}$, eine DGL mit „getrennten Variablen".

19.9. Bsp.: $y' = \frac{x-y}{x}$, $y(2) = 3$.

Die r. S. ist $= 1 - \frac{y}{x}$, mit $f(u) := 1 - u$ ergibt die Substitution $y = xu$ die AWA $u' = \frac{1-2u}{x}$, $u(2) = \frac{3}{2}$.

Für $x > 0$, $u > \frac{1}{2}$, berechnen wir nach 17.5 ⌜dort mit $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(u) = \frac{1}{1-2u}$⌟:

$$\int_{3/2}^{u(x)} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{1-2s}_{<0}}}_{g(s)} ds \stackrel{!}{=} \int_2^x \underbrace{\frac{1}{t}}_{f(t) \text{ aus } 17.5} dt, \quad \text{folglich} \quad -\frac{1}{2} \ln(2s-1) \Big|_{3/2}^{u(x)} \stackrel{!}{=} \ln(x) - \ln(2)$$

bzw. $\ln(2u(x) - 1) - \ln(2) \stackrel{!}{=} 2(\ln(2) - \ln(x))$.

Also ist $2u(x) - 1 = e^{3\ln(2) - 2\ln(x)} = 2^3 x^{-2}$, also $2u(x) = \frac{8}{x^2} + 1$,

dies führt zu $u(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{1}{2}$ und schließlich zu $y(x) = xu(x) = \frac{4}{x} + \frac{x}{2} = \frac{8 + x^2}{2x}$.

⌜Probe: $y' = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{1}{x}\underbrace{\left(\frac{4}{x} + \frac{x}{2}\right)}_{y}$ ✓, $y(2) = \frac{8+4}{4} = 3$ ✓⌟