Vorlesung Analysis II — SoSe '25 hhu

Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ — K. Halupczok

an2: Geometrie von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m=1$ oder $n=1$

Stichworte: affine Räume, Parameter- und Normalendarstellung, Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, Komponentenfunktionen

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.2

2.1. Einleitung: Nach kurzer Überlegung zur Darstellung affin-linearer Objekte im $\mathbb{R}^n$, also Geraden, Ebenen, Hyperebenen, ... arbeiten wir an der geometrischen Anschauung von Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die affin linear oder nicht affinlinear sind. Wir betrachten insbesondere $\mathbb{R}$-wertiger (auch: reellwertiger) Funktionen, d.h. solche Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $m=1$, sowie auch "kurvenartige" Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ mit $n=1$.

2.2. Affine Räume im $\mathbb{R}^n$: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$, so heißt $a+U$ für ein $a \in \mathbb{R}^n$ ein (d-dimensionaler) affiner Raum, wenn $\dim U = d$ ist. (Man kann a einen Aufpunkt von $a+U$ nennen.)

Es gibt folgende Arten zur Beschreibung der El. von $a+U$:

2.3. • Parameterdarstellung: Ist U die lineare Hülle von Vektoren $v_1, \ldots, v_r$, d.h. $U = L(v_1, \ldots, v_r) := \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}v_1 + \ldots + \mathbb{R}v_r$,
d.h. die Menge aller Linearkombinationen $\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i$ der $v_1, \ldots, v_r$,
auch: der Span der $v_1, \ldots, v_r$, geschrieben $\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_r)$,
bzw. auch: das lineare Erzeugnis der $v_1, \ldots, v_r$, geschrieben $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle$.

Keine Skalarprodukt-Klammern, sondern "Erzeugerklammern"!

Dann ist
$$a + U = a + L(v_1, \ldots, v_r) = \{a + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r;\ \underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}}_{\text{die Parameter}}\}.$$

Sind $v_1, \ldots, v_r$ lin. unabh., gilt $\dim(a+U) = \dim U = r$, die $v_1, \ldots, v_r$ heißen dann Richtungsvektoren.

Für $r = \dim U = 1$ ist dies eine Gerade $a + \mathbb{R} v_1 = \{a + t v_1 ;\ t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$, "in Richtung" $v_1 \in \mathbb{R}^n$, $v_1 \neq 0$, und mit Aufpunkt $a \in \mathbb{R}^n$.
Für $r = \dim U = 2$ ist dies eine Ebene $a + \mathbb{R} v_1 + \mathbb{R} v_2 = \{a + t v_1 + s v_2 ;\ t, s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$, mit zwei (linear unabh.) Richtungsvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ und Aufpunkt $a \in \mathbb{R}^n$.
Usw.

Eine besonders einfache Darstellung ist im Fall $\dim U = n-1$ möglich, den zugehörigen affinen Raum nennen wir eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$:

2.4. • Normalendarstellung (einer Hyperebene im $\mathbb{R}^n$):

Sei

$$H_{c,\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underset{\text{Standard Skalarprodukt}}{\langle x, c\rangle} = \alpha\} \text{ für } c \in \mathbb{R}^n,\ c \neq 0, \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sei $p \in H_{c,\alpha}$ irgendein Punkt dieser Menge, d.h. es gelte $\langle p, c\rangle = \alpha$.
Dann ist $H_{c,\alpha} = p + U$ mit einem Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$, für den $\dim U = n-1$ ist, denn: $U = \ker f$ für die lineare Abb. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, c\rangle$

⌈ $x \in H_{c,\alpha} \Leftrightarrow \langle x, c\rangle = \alpha \Leftrightarrow \langle \underbrace{x - p}_{=u}, c\rangle = \alpha - \underbrace{\langle p, c\rangle}_{=\alpha} \Leftrightarrow x = p + u$ mit $u \in \ker f$,

dabei ist $\operatorname{im} f = \mathbb{R}$, also $\dim U = \dim \ker f \underset{\text{Rangsatz}}{=} n - \dim \operatorname{im} f = n - 1$. ⌋

L13.10 (Lineare Algebra I, SoSe '24)

Mit $U = \ker f = \{u \in \mathbb{R}^n ;\ \langle u, c\rangle = 0\} =: \{c\}^\perp$ folgt, dass die $u \in U$ genau die Vektoren im $\mathbb{R}^n$ sind, die senkrecht auf c stehen, bzw. wir haben $U^\perp = \mathbb{R} c$. Ü
Da c senkrecht zu jedem Punkt von U ist, heißt c Normalenvektor von $H_{c,\alpha}$.
Denn eine Gerade $p + \mathbb{R} c \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Normale von $H_{c,\alpha}$ und steht senkrecht auf $H_{c,\alpha}$.

2.5. • Ein Spezialfall der Normalendarstellung ist die Hessesche Normalform: $H_{c,\alpha}$ mit $\|c\| = 1$ (wo der Normalenvektor auf 1 normiert ist).

Die Formeln in 2.8 und 2.9 werden dann noch einfacher.

2.6. **Bsp. zur Normalendarstellung:** Eine Ebene E im Raum $\mathbb{R}^3$ kann in der Form

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} ; \underbrace{\gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3}_{= \langle x, c \rangle} = \alpha \right\}$$

dargestellt werden; $c = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$ ist darin der Normalenvektor, d.h. $c \perp E$.

Die Ebene $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \underline{\underline{3}}\, x - \underline{\underline{2}}\, y - \underline{\underline{}} z = 2 \right\}$ z.B. steht senkrecht auf $c = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

In dieser Form nennt man die Normalendarstellung auch oft Koordinatendarstellung von E. Anderes Bsp.: $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; x = 0 \right\}$ ist die y-z-Ebene, und $E = \{ (w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 ; w - 3x - y + 4z = 10 \}$ ist die (3-dim.) Hyperebene im $\mathbb{R}^4$, die senkrecht zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist.

2.7. **Schulbsp. zur Normalendarstellung:** Eine Gerade g in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist auch eine "Hyperebene" im $\mathbb{R}^2$, da $\dim g = 1 = 2 - 1$ gilt.

Eine Normalendarstellung lautet dann $g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \alpha \right\}$ für $\gamma_1, \gamma_2, \alpha \in \mathbb{R}$,
d.h. wird beschrieben durch die Gleichung $\gamma_1 x + \gamma_2 y = \alpha$

$$\underset{|:\gamma_2 \neq 0}{\iff} \quad y = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} x + \frac{\alpha}{\gamma_2}$$

$\leftarrow$ Geradengleichung der Schule mit Steigung $m = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, und $c = \frac{\alpha}{\gamma_2}$ als y-Achsenabschnitt.

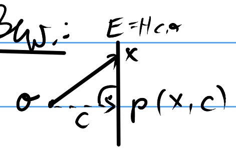
Sogar an einer "Schulglg." $1 \cdot y = mx + c$ für eine Gerade g kann man also den Normalenvektor $\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$ ablesen, der senkrecht auf der Geraden g (mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$) steht: $\left\langle \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\rangle = -m + m = 0$.

2.8. **Rechnen mit der Hesseschen Normalform:** Sei $E = H_{c,\alpha} = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \langle x, c \rangle = \alpha \}$, $c \neq 0$.

1. **Beh.:** • Ist $H_{c,\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$ geg., so ist der Abstand von 0 zu $H_{c,\alpha}$ gegeben als $\operatorname{dist}(0, H_{c,\alpha}) = \frac{|\alpha|}{\|c\|}$.

• Ist außerdem $\|c\| = 1$, ist dieser Abstand also $= |\alpha|$.

Bew.:



Sei $x \in H_{c,\alpha}$ beliebig.

Der gesuchte Abstand ist die Länge von $p(x,c)$,
also $\operatorname{dist}(0, H_{c,\alpha}) = \|p(x,c)\| = \left\| \frac{\langle x,c \rangle}{\langle c,c \rangle} \cdot c \right\| = \frac{|\langle x,c \rangle|}{\|c\|} = \frac{|\alpha|}{\|c\|}$. $\square$

Bsp.: $H_{\underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)}_{c}, \underbrace{-7}_{\alpha}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y = -7 \right\}$ hat den Abstand $\underbrace{|\alpha| = |-7| = 7}_{\text{ist nicht der } y\text{-Achsenabschnitt!}}$ vom Ursprung 0.

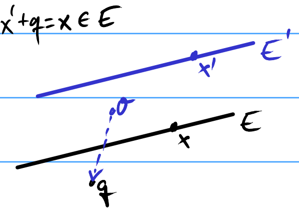
hier: $\|c\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$

2.9. 2. Bek.: Ist $H_{c,\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$ geg., so ist der Abstand von (irgendeinem) $q\in\mathbb{R}^n$ zu $H_{c,\alpha}$ gegeben als

$$\mathrm{dist}(q,H_{c,\alpha}) = \frac{|\langle q,c\rangle-\alpha|}{\|c\|}.$$

Bew.: Betr. die um $-q$ verschobene Ebene $E' := \{x';\ x'+q\in E\}$, dann ist der gesuchte Abstand der von 0 zu E', für ein $x'\in E'$ also $= \|p(x',c)\| \underset{x'+q=x\in E}{=} \|p(x-q,c)\|$

$$= \left\|\frac{\langle x-q,c\rangle}{\langle c,c\rangle}\cdot c\right\| = \left\|\frac{\langle x,c\rangle}{\|c\|^2}\cdot c - \frac{\langle q,c\rangle}{\|c\|^2}\cdot c\right\|$$



$$= \frac{1}{\|c\|}\cdot|\alpha-\langle q,c\rangle| \quad \square$$

2.10. Bsp.: Abstand von $q=\binom{1}{-2}$ zu $H_{\binom{2}{3},5} = \left\{\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2;\ 2x+3y=5\right\}$ ist

$$\frac{|\langle q,c\rangle-\alpha|}{\|c\|} = \frac{|1\cdot2+(-2)\cdot3-5|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{|2-6-5|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}. \quad\square$$

2.11. Geometrische Anschauung von Funktionen $f: D\to\mathbb{R}^m$ mit $\emptyset\neq D\subseteq\mathbb{R}^n$, $m,n\in\mathbb{N}$.

Der Graph von f ist $G(f) := \{(x,f(x))\in\mathbb{R}^{n+m};\ x\in D\}$

$$= \{(\xi_1,\dots,\xi_n, f(\xi_1,\dots,\xi_n));\ (\xi_1,\dots,\xi_n)^T\in D\}\subseteq\mathbb{R}^{n+m},$$

wir "verkleben" die Koordinaten von x mit denen von $f(x)$ zu Vektoren im $\mathbb{R}^{n+m}$.

(1) Fall $m=1$, d.h. eine $\mathbb{R}$-wertige/reellwertige Funktion, auch Skalarfeld genannt.

Für $n=2$ läßt sich $G(f)$ oftmals als "Fläche" im $\mathbb{R}^3$ deuten, für die man bei festem $c\in\mathbb{R}$ die „Niveaulinie" $\{x\in D;\ f(x)=c\}$ vom Niveau c betrachten kann (wie Höhenlinien bei Wanderkarten).

Dabei macht man „Horizontalschnitte", d.h. man schneidet den Graphen $G(f)$ mit der Ebenen der Glg. $\xi_3=c$ (d.h. "$z=c$") und projiziert den Schnitt auf die ξ_1-ξ_2-Ebene (bzw. xy-Ebene).

(a) Bsp. Für die Halbkugelfläche $f: \{(x,y);\ x^2+y^2\leq 1\}\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto\sqrt{1-x^2-y^2}$ sind die Niveaulinien von Niveau c:

$$\begin{cases} \emptyset, & c>0,\ c<0 \\ \{0\}, & c=1 \\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1-c^2\}, & 0\leq c<1 \leftarrow \text{Kreise vom Radius } \sqrt{1-c^2} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow G(f) = ?$ (Ü)

eigentlich: $f\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix}\right)$

(b) <u>Bsp.:</u> $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin-linear, d.h. $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_n \xi_n + \beta$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$. Der Graph $G(f) = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n, \beta + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i)^T;\ \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist (i.a.) eine n-dim. Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Gleichung $-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i + \xi_{n+1} = \beta$.

(c) Die Schnitte des Graphen $G(f)$ einer Fkt. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den Koordinatenhyperebenen, die jeweils durch eine Glg. $\xi_i = 0$, $1 \le i \le n$, gegeben sind, sind "Vertikalschnitte".
Bei $n=2$ hat man da die xy-Ebene der Glg. $z=0$, die xz-Ebene der Glg. $y=0$, und $x=0$ ist die yz-Ebene, die zugeh. Vertikalschnitte sind $\{(x,y,0)^T;\ f(x,y)=0\}$, $\{(x,0,f(x,0))^T;\ x \in \mathbb{R}\}$, $\{(0,y,f(0,y))^T;\ y \in \mathbb{R}\}$.

(2) <u>Fall $n=m$:</u> $f: D \to \mathbb{R}^n$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>Vektorfeld</u>.

(3) <u>Fall $n=1$:</u> Etwa $f: I \to \mathbb{R}^m$, wo $I \subseteq \mathbb{R}^1$ ein Intervall ist.
Der Graph ist ein "kurvenähnliches" Gebilde im $\mathbb{R}^{1+m}$, die Funktionswerte im $\mathbb{R}^m$ können mit der Projektionsabb. $pr_i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ aus <u>1.11</u> komponentenweise betrachtet werden durch $f_i := pr_i \circ f$, $f_i: I \to \mathbb{R}$ für $1 \le i \le m$.
Diese Funktionen können mit den Methoden der Analysis I untersucht werden, z.B. Untersuchung auf Differenzierbarkeit (f ist diff'bar, wenn alle f_i diff'bar, so dass wir in diesem Fall von einer <u>Kurve</u> sprechen wollen, vgl. <u>4.5</u>).

2.12. <u>Def.:</u> Sind $pr_1, \ldots, pr_m$ die Projektionsabb. $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, und $f: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, dann heißt <u>$f_i := pr_i \circ f$</u> $: D \to \mathbb{R}$ die <u>i-te Komponentenfunktion von f</u>, wo $1 \le i \le m$ ist. Damit gilt $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

auch: <u>"Koordinatenfunktion"</u>

Viele Eigenschaften von Funktionen f mit $\mathbb{R}^m$ als Zielmenge können mit ihren Komponentenfunktionen (leichter) untersucht werden, da diese Skalarfelder sind.

2.13. <u>Bsp.:</u> Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abb. (im Sinne der Linearen Algebra), also $f(x) = A \cdot x$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, etwa $A = (\alpha_{ij})$.
Die m Komponentenfkt. sind $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j$, wo $1 \le i \le m$.
Der Graph jeder einzelnen Komponentenfunktion ist (i.a.) eine Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Gleichung $\xi_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j$, und der Gesamtgraph $G(f)$ wird durch die m Gleichungen $\xi_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j$ beschrieben.