Vorlesung Analysis II — SoSe '25 hhu

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen — K. Halupczok

an20: Spezielle explizite DGLn 2. Ordnung

Stichworte: explizite DGL 2. Ordnung ohne y und ohne x

Literatur: [Hoffmann], Kapitel 7.6/7

20.1. **Einleitung:** Wir behandeln zwei spezielle Beispiele für DGLn 2. Ordnung, die sich durch geeignete Substitution in eine DGL 1. Ordnung überführen lässt.

20.2. **Def.:** Eine DGL der Art $\boxed{y'' = f(x, y')}$ ⊛, ist eine explizite DGL 2. Ordnung ohne y.

20.3. **Vorgehen:** Substitution $z = y'$ führt auf $\boxed{z' = f(x, z)}$, also eine explizite DGL 1. Ordnung.
Eine Lösung z dieser DGL liefert y als Stammfunktion zu z.

20.4. **Bsp.:** $\boxed{y'' = \sqrt{1 + y'^2}}$, mit $z = y'$ erhalten wir $z' = \sqrt{1 + z^2}$ bzw. $\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = 1$.
Die l.S. ist aber die Ableitung von $\operatorname{arsinh}(z)$, s. An14.12.
Mit $c \in \mathbb{R}$ folgt $\operatorname{arsinh}(z) = x + c$, also $z = \sinh(x + c)$ und $y(x) = \cosh(x + c) + d$, $c, d \in \mathbb{R}$ Konstanten.

20.5. **Def.:** Eine DGL der Art $\boxed{y'' = f(y, y')}$ ⊛ ist eine explizite DGL 2. Ordnung ohne x.

20.6. **Vorgehen:** Substitution $p = p(y) = y'$, also $y'' = p'(y)y' = p'(y)p$,
man erhält die DGL 1. Ordnung $pp'(y) = f(y, p)$, für $p \neq 0$ also: $\boxed{p'(y) = \frac{f(y,p)}{p}}$ ⊕.
Ist p Lösung von ⊕, so ist in IVen, in denen $p(\eta) \neq 0$ ist: $x = \int^{y(x)} \frac{d\eta}{p(\eta)} + C$ $\left[\text{aus } 1 = \frac{y'}{p}\right]$
woraus sich unter geeigneten Voraussetzung $y(x)$ ergibt.