Vorlesung Analysis II — SoSe '25 hhu

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen — K. Halupczok

an21: Lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Stichworte: Linearität der Lösungsmenge, charakteristisches Polynom, Operatormethode

Literatur: [Hoffmann]: Kapitel 7.8, [Henser]: Kapitel 16

21.1. Einleitung: Behandeln mit der Operatormethode lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, homogen und inhomogen. Speziell den Fall $n=2$.

21.2. Vereinbarung: Betrachten für $n\in\mathbb{N}$ fest, $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$, $f: J\to\mathbb{K}$, $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, $J\subseteq\mathbb{R}$ ein IV, f stetig,

die DGL $\boxed{u^{(n)}+a_{n-1}u^{(n-1)}+\dots+a_1u'+a_0u=f}$ $\circledast$.

21.3. Motivation: Haben schon $n=1$ behandelt, daneben ist $n=2$ wichtig.

21.4. Def.: Für $f\neq 0$ heißt $\circledast$ eine inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten,

f heißt Inhomogenität oder Störglied.

Die zugehörige homogene DGL (linear, n-ter Ordnung, mit konstanten Koeffizienten) lautet $\circledast_h$ $\boxed{u^{(n)}+a_{n-1}u^{(n-1)}+\dots+a_1u'+a_0u=0}$.

21.5. Linearitätsüberlegungen: (a) u,v Lsgn. von $\circledast_h$ $\Rightarrow$ $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$: $\alpha u+\beta v$ Lsg. von $\circledast_h$, d.h. die Menge der Lösungen der homogenen DGL $\circledast_h$ liefert einen Vektorraum.

(b) u Lsg. von $\circledast$ $\wedge$ v Lsg. von $\circledast_h$ $\Rightarrow$ $u+v$ Lsg. von $\circledast$

(c) v,w Lsgn. von $\circledast$ $\Rightarrow$ $v-w$ Lsg. von $\circledast_h$

(d) Ist $y=u+iv$ mit $u,v: J\to\mathbb{R}$, $i=\sqrt{-1}$, so gilt:

y (komplexe) Lsg. von $\circledast$ $\Leftrightarrow$ u,v (reelle) Lsgn. von $\circledast$ mit $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ als r.S.

Bem.: Alle Lsgn. von $\circledast$ erhält man durch Addition irgendeiner speziellen (partikulären) Lsg. zu einer (beliebigen) von $\circledast_h$.

21.6. **Def.:** Das zu ⊛ gehörige Polynom $\varphi(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$, $\lambda \in \mathbb{K}$,
heißt das charakteristische Polynom von ⊛,
die Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ heißt charakteristische Glg.

21.7. **Spezialfall $n=2$:** ⊛: $u'' + au' + bu = f$, $\quad$ ⊛$_h$: $u'' + au' + bu = 0$,
wo $a, b \in \mathbb{R}$, $f: J \to \mathbb{K}$ stetig.
Das charakteristische Polynom ist $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$, $\lambda \in \mathbb{K}$,
und $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ist die charakteristische Glg.

21.8. **Def.:** Der Ableitungsoperator D sei definiert durch $Du := u'$
für $u: J \to \mathbb{K}$ bel. oft diff'bar.

21.9. **Bem.:** $D: \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{K}) \to \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{K})$ ist linear.

21.10. **Def.:** Mit $D^0 = E := \mathrm{id}_{\mathcal{C}^\infty(J,\mathbb{K})}$ und $D^{k+1} := D D^k$, $k \in \mathbb{N}_0$,
sind bel. Potenzen und Linearkombinationen davon definiert.

21.11. **Bem.:** • Haben $Eu = u$, $D^k u = u^{(k)}$, für $k \in \mathbb{N}_0$, $u \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{K})$.
• Haben die Vertauschbarkeitsbeziehung $\forall n, m \in \mathbb{N}_0$: $D^n D^m = D^{n+m} = D^m D^n$.

21.12. **Notation:** Zur Abkürzung def. $\underline{\alpha} := \alpha E$ für $\alpha \in \mathbb{K}$,
und für $k \in \mathbb{N}_0$, $c_0, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$, $\psi(x) := \sum_{\ell=0}^{k} c_\ell x^\ell$, $x \in \mathbb{K}$,
notieren wir $\psi(D) := \sum_{\ell=0}^{k} c_\ell D^\ell$. (Setzen D in Polynome ein!)

Schreiben damit ⊛ in der Kurzform ⊛ $\boxed{\varphi(D)u = f}$.

21.13. **Beh.:** Für $\psi \in \mathbb{K}[x]$, $\alpha \in \mathbb{K}$: $\psi(D)e^{\alpha x} = \psi(\alpha)e^{\alpha x}$ (als Fkt. in x).
Bew.: l.S. $= \left(\sum_{\ell=0}^{k} c_\ell D^\ell\right)e^{\alpha x} = \sum_{\ell=0}^{k} c_\ell (D^\ell e^{\alpha x}) = \sum_{\ell=0}^{k} c_\ell \alpha^\ell e^{\alpha x} =$ r.S. □

21.14. **Folgerung:** (a) $\forall \alpha, \mu \in \mathbb{K}\ \forall r \in \mathbb{N}_0$: $(D - \mu)^r e^{\alpha x} = (\alpha - \mu)^r e^{\alpha x}$. $\quad$ ⌜$\psi(x) = (x-\mu)^r$⌟
(b) Ist α Nst. von φ, so ist $e^{\alpha x}$ Lsg. der homogenen DGL ⊛$_h$. $\quad$ ⌜aus (a)⌟
(c) Ist α keine Nst. von φ, so ist $\frac{\beta}{\varphi(\alpha)} e^{\alpha x}$ Lsg. der inhomogenen DGL ⊛
mit der r.S. $f(x) := \beta e^{\alpha x}$ für $\beta \in \mathbb{K}$. $\quad$ ⌜$\psi = \varphi$ in 21.13.⌟

21.15. **Bsp.:** DGL $\boxed{u''+u'-6u=e^x}$ ⊛

Haben $\varphi(\lambda)=\lambda^2+\lambda-6=(\lambda+3)(\lambda-2)$.

Mit 21.14(a) erhalten wir e^{-3x}, e^{2x} als Lsgn. von $⊛_h$.

Mit 21.14(b) ergibt sich $(\alpha:=1,\ \beta:=1)$ dann $\frac{1}{\varphi(1)}e^x=-\frac{1}{4}e^x$

als eine Lsg. von ⊛. Somit: $c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}-\frac{1}{4}e^x$, $c_1,c_2\in\mathbb{K}$,

sind Lösungen von ⊛.

[Auch: alle Lsgn., denn der Lsgs.raum von $⊛_h$ hat die Dimension 2 nach 21.24.]

21.16. **Lemma:** Für $\Psi\in\mathbb{K}[x]$, $\alpha\in\mathbb{K}$, $v\in\mathcal{C}^\infty(j,\mathbb{K})$ gilt:

$$\Psi(D)(e^{\alpha x}v)=e^{\alpha x}\Psi(D+\alpha)v$$

"Exponentialshift".

Bew.: • Der Spezialfall $\Psi(x)=x^\ell$, $\ell\in\mathbb{N}_0$, ergibt sich induktiv:

$\ell=0$: trivial wegen $\Psi(D)=D^0=id=(D+\alpha)^0$ ✓ $\underset{\text{Ind.vor.}}{\downarrow}$

$\ell\to\ell+1$: $D^{\ell+1}(e^{\alpha x}v)=D(D^\ell e^{\alpha x}v)=D(e^{\alpha x}\underbrace{(D+\alpha)^\ell v}_{=:w\in\mathcal{C}^\infty(j,\mathbb{K})})$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Produktregel}}}{=}e^{\alpha x}(\alpha+D)w=e^{\alpha x}(D+\alpha)^{\ell+1}v. \checkmark$$

• Daraus ist der allg. Fall ablesbar, da $\Psi(D)=\sum_{\ell=0}^{k}c_\ell D^\ell$. □

21.17. **Bem.:** $\Psi(D+\alpha)=\sum_{\ell=0}^{k}\frac{\Psi^{(\ell)}(\alpha)}{\ell!}D^\ell$, $\alpha\in\mathbb{K}$.

21.18. **Bew.:** Taylorentwicklung von Ψ zeigt $\Psi(t+\alpha)=\sum_{\ell=0}^{k}\frac{\Psi^{(\ell)}(\alpha)}{\ell!}t^\ell$. □

21.19. **Bem.:** Beh. 21.13. ergibt sich auch aus dem Exponentialshift 21.16 mit $v(t)\equiv1$,

denn alle Ableitungen (ab der Ordnung 1) sind 0, somit ist $\Psi(D+\alpha)v=\Psi(\alpha)$.

21.20. **Bem.:** $\varphi(D)(xe^{\alpha x})=(x\varphi(\alpha)+\varphi'(\alpha))e^{\alpha x}$, $\alpha\in\mathbb{K}$.

Bew.: direkt oder ablesbar aus 21.16. und 21.17. mit $v(x):=x$ wie folgt:

$$l.S.\underset{\substack{\uparrow\\ 21.16.}}{=}e^{\alpha x}\varphi(D+\alpha)x\underset{21.17.}{=}e^{\alpha x}\sum_{\ell=0}^{m}\frac{\varphi^{(\ell)}(\alpha)}{\ell!}\underbrace{D^\ell x}_{=0\text{ für }\ell\geq2}=e^{\alpha x}\sum_{\ell=0}^{1}\frac{\varphi^{(\ell)}(\alpha)}{\ell!}D^\ell x=r.S. \quad □$$

Aus Bem. 21.20. erhalten wir als Ergänzung zu 21.14:

21.21. **Satz:** (d) Ist α doppelte Nst. von φ, so ist auch $xe^{\alpha x}$ Lsg. von $\circledast_h$. ⌈$\varphi(\alpha)=0=\varphi'(\alpha)$⌋
(e) Ist α nur einfache Nst. von φ (d.h. $\varphi(\alpha)=0\neq\varphi'(\alpha)$),
so liefert $\frac{\beta}{\varphi'(\alpha)}\,x e^{\alpha x}$ eine Lsg. von $\circledast$ mit $f(x):=\beta e^{\alpha x}$ als r.S., $\beta\in\mathbb{K}$.

21.22. **Bsp.:** DGL $\boxed{\ddot{s}-2\dot{s}+s=\cos}$

Haben $\varphi(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$, nach 21.14(b) und 21.21.(d) erhalten wir e^x, xe^x als Lsgn. von $\circledast_h$.
Zur Lsg. von $\circledast$ betr. die komplexe DGL $\boxed{\ddot{z}-2\dot{z}+z=e^{ix}}$.
Nach 21.14(c) mit $\alpha=i, \beta=1$ ist $z=\frac{1}{\varphi(i)}e^{ix}=\frac{1}{-2i}e^{ix}=\frac{1}{-2i}(\cos(x)+i\sin(x))$
⌈$\varphi(i)=i^2-2i+1=-2i$⌋ $=\frac{1}{2}(-\sin(x)+i\cos(x))$ eine partikuläre Lsg.
Da die r.S. der DGL für s genau $\mathrm{Re}(e^{ix})$ ist, erhalten wir eine partikuläre Lsg. durch $s=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}(-\sin(x)+i\cos(x))\right)=-\frac{1}{2}\sin(x)$.
⌈Ebenso mit $\mathrm{Im}(e^{ix})$ Lsg. von $\ddot{s}-2\dot{s}+s=\sin$.⌋
Haben, dass $(c_1x+c_2)e^x-\frac{1}{2}\sin(x)$ für $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ schon alle Lsgn. sind nach 21.24.

21.23. Allgemeine Lsg. der homogenen DGL $\circledast_h$:
Hat φ die r-fache Nst. $\alpha\in\mathbb{C}$, d.h. $\varphi(x)=(x-\alpha)^r\psi(x)$, $r\in\mathbb{N}_0$ und $\psi\in\mathbb{C}[x]$, $\deg\psi=n-r$, $\psi(\alpha)\neq 0$,
so hat man $\varphi(D)=(D-\alpha)^r\psi(D)=\psi(D)(D-\alpha)^r$.

Fall $(D-\alpha)^r u=0$: Dies zeigt $\varphi(D)u=0$, wir suchen dann Lsgn. der Form $u(x)=e^{\alpha x}v(x)$ ⌈jede Fkt. ist so schreibbar⌋.
Dann ist $0=(D-\alpha)^r e^{\alpha x}v \underset{21.16.(\text{Expo-Shift})}{=} e^{\alpha x}D^r v$, also $D^r v=0$.
Also ist v ein Polynom vom Grad $\leq r-1$,
und $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x},\dots,x^{r-1}e^{\alpha x}$ sind zu α gehörende Lsgn. von $\circledast_h$.
⌈diese erzeugen alle Lsgn. in diesem Fall; Bew. in 21.26.⌋
Diese sind linear unabh., da $x^0,x^1,\dots,x^{r-1}$ lin. unabh. Fktn. sind.

21.24. Schluss: Man erhält eine Basis des Lsgs.raums (ein "Fundamentalsystem"), d.h.:
$\varphi(D)u=0$ Jede Lsg. von $\circledast_h$ lässt sich in eindeutiger Weise als LK von $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \ldots, x^{r-1}e^{\alpha x}$ schreiben, wobei α die verschiedenen Nullstellen von φ durchläuft.
Hat φ nur reelle Nst., ergibt dies ein reelles Fundamentalsystem.

21.25. Bem.: Die Lösung der allgemeinen DGL $\boxed{\varphi(D)u=f}$ $\circledast$
lässt sich wegen $\varphi(D)=(D-\lambda_1)^{r_1}\cdots(D-\lambda_s)^{r_s}$,
$s\in\mathbb{N}$, $r_1,\ldots,r_s\in\mathbb{N}$, die $\lambda_1,\ldots,\lambda_s\in\mathbb{C}$ p.w.v. Nst. von φ [laut Hauptsatz der Algebra]
auf das sukzessive Lösen von m (linearen) DGLn erster Ordnung zurückführen.

21.26. Beweisskizze für 21.24:
1. Schritt: Aus der Darstellung $\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$ gewinnen wir mit der Partialbruchzerlegung An 17.14 Polynome $q_1,\ldots,q_s$ mit

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)}=\frac{q_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{r_1}}+\ldots+\frac{q_s(\lambda)}{(\lambda-\lambda_s)^{r_s}}, \quad \lambda\notin\{\lambda_1,\ldots,\lambda_s\}.$$

2. Schritt: Setze $p_j(\lambda):=\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{s}(\lambda-\lambda_\ell)^{r_\ell}, \quad j=1,\ldots,s.$

Damit folgt $\quad 1=q_1(\lambda)p_1(\lambda)+\ldots+q_s(\lambda)p_s(\lambda),$

also $\quad u=\underbrace{q_1(D)p_1(D)u}_{=:u_1}+\ldots+\underbrace{q_s(D)p_s(D)u}_{=:u_s}.$

3. Schritt: Ist u Lsg. von $\circledast_h$, so gilt

$$\text{(\#)}\quad \boxed{(D-\lambda_j)^{r_j}u_j=0}, \quad j=1,\ldots,s,$$

[l.S. $=(D-\lambda_j)^{r_j}q_j(D)p_j(D)u=q_j(D)\underbrace{\varphi(D)u}_{=0}=0$]

4. Schritt: Die Lsgn. $v_1,\ldots,v_s$ von (#) liefern durch $v:=v_1+\ldots+v_s$ eine Lsg. von $\circledast_h$. [$\varphi(D)v=\varphi(D)v_1+\ldots+\varphi(D)v_s=\sum_{j=1}^{s}p_j(D)\underbrace{(D-\lambda_j)^{r_j}v_j}_{=0}=0.$]

5. Schritt: Dimensionsüberlegung: $\mathfrak{N}:=\{u\in\mathcal{C}^\infty(J,\mathbb{C});\ \varphi(D)u=0\ (\Leftrightarrow \circledast_h)\}$.
und für $1\le j\le s$ sei $\mathcal{L}_j:=\{v_j\in\mathcal{C}^\infty(J,\mathbb{C});\ (D-\lambda_j)^{r_j}v_j=0\}$.
Haben Isomorphismus $\mathfrak{N}\cong\mathcal{L}_1\oplus\ldots\oplus\mathcal{L}_s$, $u\mapsto u_1+\ldots+u_s$, wo $u_j:=q_jp_j(D)u$, $1\le j\le s$.
Dabei ist die Summe der $\mathcal{L}_j$ direkt. Es folgt $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{N}=\dim\mathcal{L}_1+\ldots+\dim\mathcal{L}_s\overset{\uparrow}{=}r_1+\ldots+r_s=m$. □
21.23

Man erhält auf ähnliche Art den:

21.27. Existenz- und Eindeutigkeitssatz für DGL $\varphi(D)y=f$:
Zu $f\in\mathcal{C}(j,\mathbb{C})$, $x_0\in j$, $(y_0,\dots,y_{n-1})\in\mathbb{C}^n$ ex. eindeutig ein $y\in\mathcal{C}^\infty(j,\mathbb{C})$, $\varphi(D)y=f$, mit $y^{(j)}(x_0)=y_j$, $j=0,\dots,n-1$.
Vgl. [Heuser, Satz 16.13]

21.28. Der Ex.- und Eind.satz 21.27 (bzw. die Überlegungen in 21.23–21.26) liefern speziell für den VR der Lösungen der homogenen DGL,
$$\mathcal{N}:=\{u\in\mathcal{C}^\infty(j,\mathbb{C});\ \varphi(D)u=0\},$$
durch $\overset{\psi}{u}\mapsto(u(x_0),\dots,u^{(n-1)}(x_0))\in\mathbb{C}^n$ einen Isomorphismus,
d.h. $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{N}=n$.

21.29. Reelle Lösungen zu komplexen Nst.
Ist $\alpha+i\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\beta\neq0$, r-fache Nst. von φ, so auch $\alpha-i\beta$.
Die zugeh. homogenen Lsgn. sind nach 21.23 dann von der Form
$$p(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+q(x)e^{(\alpha-i\beta)x},\quad p,q\in\mathbb{C}[x],\ \deg p,\deg q\le r-1.$$
Zu $P,Q\in\mathbb{R}[x]$, $\deg P,\deg Q\le r-1$, sind mit
$$p=\tfrac{1}{2}(P-iQ),\quad q=\tfrac{1}{2}(P+iQ)$$ dann die Funktionen
$$\begin{aligned}pe^{(\alpha+i\beta)x}+qe^{(\alpha-i\beta)x}&=e^{\alpha x}\left(\tfrac{1}{2}(P-iQ)e^{i\beta x}+\tfrac{1}{2}(P+iQ)e^{-i\beta x}\right)\\&=e^{\alpha x}\left[P\left(\tfrac{1}{2}(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x})\right)-Q\left(\tfrac{i}{2}(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x})\right)\right]\\&=e^{\alpha x}(P\cos(\beta x)+Q\sin(\beta x))\end{aligned}$$
die reellen Lösungen.

21.30. Fazit: Zu einer r-fachen Nst. $\alpha+i\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, gehört die allg. Lsg.
$$e^{\alpha x}(P\cos(\beta x)+Q\sin(\beta x)),\quad\text{mit } P,Q\in\mathbb{R}[x],\ \deg P,\deg Q\le r-1.$$
- Für $r=1$ ist dies $e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x)+c_2\sin(\beta x))$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.
- Falls $\beta=0$, ist α reelle Nst. mit allg. Lsg. $e^{\alpha x}P$, $P\in\mathbb{R}[x]$, $\deg P\le r-1$,
- speziell $r=1$ und $\beta=0$ ergibt $ce^{\alpha x}$, falls α einfache reelle Nst.

21.31. <u>Spezialfall $n=2$:</u> $\boxed{y''+ay'+by=0}$ $a,b\in\mathbb{R}$.

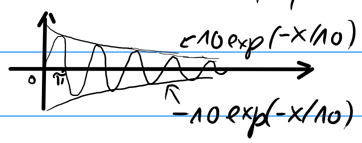
1. Fall $a^2-4b>0$: haben zwei verschiedene reelle Nst.
$$\lambda_{1/2}=\frac{1}{2}\left(-a\pm\sqrt{a^2-4b}\right),$$
und $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ ist (reelles) Fundamentalsystem.

2. Fall $a^2-4b=0$: haben eine doppelte Nst. $\lambda_0:=-\frac{a}{2}$
und $e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}$ ist (reelles) Fundamentalsystem.

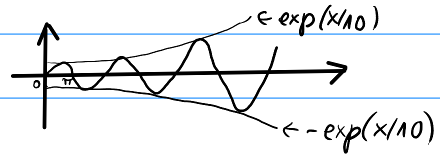
3. Fall $a^2-4b<0$: $\lambda_{1/2}=\alpha\pm i\beta$, $\alpha:=-\frac{a}{2}$, $\beta:=\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}$
sind konjugiert komplexe Nst.,
und $e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ ist (reelles) Fundamentalsystem.

⌈Darin enthalten: Spezialfälle $a=0 \vee b=0$,
d.h.: • falls $a=0\wedge b=0$: $y''=0 \rightsquigarrow y(x)=c_1x+c_2$,
• falls $a\neq 0\wedge b=0$: $y''+ay'=0 \to y(x)=c_1+c_2e^{-ax}$,
• falls $a=0\wedge b\neq 0$: $b<0$: $\lambda_{1/2}=\pm\sqrt{-b}$, $y=c_1e^{\sqrt{-b}\,x}+c_2e^{-\sqrt{-b}\,x}$,
$b>0$: $\lambda_{1/2}=\pm i\sqrt{b}$, $y=c_1\sin(\sqrt{b}x)+c_2\cos(\sqrt{b}x)$.⌋

<u>Bsp.:</u> $y(x)=10\,e^{\left(-\frac{x}{10}\right)}\sin(x)$
gedämpfte Schwingung mit $\alpha<0$



<u>Bsp.:</u> $y(x)=\exp\left(\frac{x}{10}\right)\sin x)$
aufschaukelnde Schwingung mit $\alpha>0$



21.32. <u>Lösung der inhomogenen DGL</u>
Aus der Linearität von $\varphi(D)$ folgt das

21.33. <u>Superpositionsprinzip:</u> Ist $f=f_1+f_2$ und u_j Lsg. von $\varphi(D)u_j=f_j$, $j=1,2$,
so liefert $u:=u_1+u_2$ eine Lsg. von $\varphi(D)u=f$. ⊛
Strategie: Suche Lsgn. für die einzelnen Summanden von f.

21.34. <u>Satz:</u> Vor.: $Q\in\mathbb{C}[x]$, $\deg Q=s\in\mathbb{N}_0$, $\alpha\in\mathbb{C}$.
Beh.: Zur Inhomogenität $f:=e^{\alpha x}Q$ ex. eine Lsg. von ⊛ der Gestalt $e^{\alpha x}R$
mit einem $R\in\mathbb{C}[x]$, wo $\deg R\leq s$ für $\varphi(\alpha)\neq 0$, und $\deg R\leq r+s$ für Nst. α der Ordn. r.
Beweis siehe [Heuser, Satz 16.5]

Nützlich zum Auffinden einer partikulären Lösung von ⊛:

21.35. **Bem.:** Ist $P \in \mathbb{C}[x]$, $\deg P \le k \in \mathbb{N}_0$, so gilt $\forall \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$:

$$(D-\alpha)^{-1} P = -\frac{1}{\alpha} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{\alpha^\ell} D^\ell P.$$

Bew.: $(D-\alpha)\cdot$ r.S. $= \underbrace{-\frac{1}{\alpha}\sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{\alpha^\ell} D^{\ell+1}P}_{\underset{D^{k+1}P=0}{\uparrow}{=}-\sum_{\ell=1}^{k}\frac{1}{\alpha^\ell}D^\ell P} + \sum_{\ell=0}^{k}\frac{1}{\alpha^\ell}D^\ell P = \frac{1}{\alpha^0}D^0 P = P = (D-\alpha)\cdot$ l.S. ✓

□

21.36. **Bsp.:** $\boxed{y'' - 4y' + 4y = x^2}$.

Die l.S. ist $(D^2-4D+4)\,y = (D-2)^2 y$, nach 21.14.(b) und 21.21.(d) liefern e^{2x}, xe^{2x} ein Fundamentalsystem der homogenen DGL.

Mit 21.35 erhält man eine partikuläre Lsg. y durch $((D-\alpha)^{-1})^2 \cdot$ r.S.

$$= ((D-2)^{-1})^2 x^2 = \left(-\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{4}D^2\right)\right)^2 x^2 \overset{\uparrow}{=} \tfrac{1}{4}\left(1+D+\tfrac{3}{4}D^2\right)x^2 = \tfrac{1}{4}\left(x^2+2x+\tfrac{3}{2}\right).$$

⌜$(1+\frac{1}{2}D+\frac{1}{4}D^2)^2 = 1+2D+(\frac{1}{2}D)^2+\frac{2}{4}D^2 +$ Terme mit D^a, $a\ge 3$⌟

21.37. Standardbsp. der Physik: Frei schwingendes Federpendel in der Mechanik

⊛ $\boxed{m\ddot{y} + r\dot{y} + ky = 0}$, y Auslenkung, Variable: Zeit $t\ge 0$, $m>0$ Masse, $r\ge 0$ Reibung, $k>0$ Federkonstante

$\leadsto a = \frac{r}{m}$, $b = \frac{k}{m}$ von der Form $⊛_h$

21.38. Standardbsp. der Physik: geschlossener Schwingkreis in der Elektrotechnik

$\boxed{CL\ddot{y} + CR\dot{y} + y = 0}$, y Kondensatorladung, Variable: Zeit $t\ge 0$, C Kapazität, R Widerstand, L Induktivität

$\leadsto a = \frac{R}{L}$, $b = \frac{1}{CL}$ von der Form $⊛_h$, genauso!

⌜Standardbsp. in Wirtschaftstheorie: Konjunkturschwankungen⌟

Lsg., nur im Fall Federpendel 21.37:

21.39. (a): harmonischer Oszillator/harmonische Schwingung im Fall $r=0$ (ohne Reibung)

Mit $\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$ wird ⊛ in der Form $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ notiert.

$\leadsto \varphi(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2 = (\lambda - i\omega_0)(\lambda + i\omega_0)$, $y(t) = c_1\sin(\omega_0 t) + c_2\cos(\omega_0 t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Mit $A\ge 0$, $\beta\in\mathbb{R}$ geeignet schreibe dies als $y(t) = A\sin(\omega_0 t + \beta)$, A: Amplitude, ω_0: Eigenfrequenz.

21.40. (b): Für $r>0$ setzen $\sigma := \frac{r}{2m} = \frac{a}{2} \rightsquigarrow a^2 - 4b = \frac{r^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} = 4(\sigma^2 - \omega_0^2)$.

1. Fall: $a^2 - 4b > 0 \iff \sigma > \omega_0$.

Dann: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2-4b}) = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}$,

$\rightsquigarrow y(t) = e^{-\sigma t}\left(c_1 e^{\sqrt{\sigma^2-\omega_0^2}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma^2-\omega_0^2}\,t}\right)$

Da $-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2-\omega_0^2} < 0$: abklingende Kriechbewegung/aperiodischer Fall/ starke Dämpfung [in 21.36: Entladung des Kondensators]

2. Fall: $a^2 - 4b = 0 \iff \sigma = \omega_0$.

Dann: $\lambda = -\frac{a}{2} = -\sigma$ ist doppelte Nst.

$\rightsquigarrow y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\sigma t}$: Kriechbewegung/aperiodischer Fall

3. Fall: $a^2 - 4b < 0 \iff \sigma < \omega_0$ (Reibung [Widerstand in 21.36] klein).

Dann: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-a \pm i\sqrt{4b - a^2}) = -\sigma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}$

$\to y(t) = e^{-\sigma t}\left(c_1 \cos(\sqrt{\omega_0^2-\sigma^2}\cdot t) + c_2 \sin(\sqrt{\omega_0^2-\sigma^2}\cdot t)\right)$:

gedämpfte Schwingung mit Dämpfungsexponenten $-\sigma$, Frequenz $\sqrt{\omega_0^2-\sigma^2}$ ist kleiner als Eigenfrequenz ω_0

21.41. Periodische Störung: $\ddot{y} + a\dot{y} + by = \ddot{y} + 2\sigma\dot{y} + \omega_0^2 y \overset{!}{=} A\cos(\omega t)$
bzw. $A\exp(i\omega t)$

mit Störamplitude $A>0$, Störfrequenz $\omega > 0$

Für $\sigma \neq 0$: Setze $\gamma := \frac{A}{\varphi(i\omega)} = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\sigma\omega} =: |\gamma|\exp(i\delta) \rightsquigarrow |\gamma| = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\sigma^2\omega^2}}$
$= \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\sigma^2))^2 + 4\sigma^2(\omega_0^2 - \sigma^2)}}$

Partikuläre Lsg.: $z(t) = |\gamma|\exp(i(\omega t - \delta))$, $|\gamma|$: Amplitude, δ: Phasenverschiebung

Im Fall $\omega_0^2 - 2\sigma^2 \geq 0 \iff \omega_0 \geq \sqrt{2}\,\sigma$ der "schwachen Dämpfung" erhält man das strikte Max. für $|\gamma|$ in $\omega^* := \sqrt{\omega_0^2 - 2\sigma^2} \rightsquigarrow |\gamma(\omega^*)| = \frac{A}{2\sigma\sqrt{\omega_0^2-\sigma^2}}$

ω^* heißt Resonanzfrequenz [$|\gamma|$ maximal $\iff \omega^*$ minimal]

Weiter: $\sigma \to 0 \Rightarrow \omega^* \to \omega_0$, $|\gamma(\omega^*)| \to \infty$

Für $\sigma = 0$: Falls $\omega = \omega_0$: $\ddot{z} + \omega_0^2 z = A\exp(i\omega_0 t) \rightsquigarrow$ Lsg. $\frac{A}{2i\omega_0}\, t\exp(i\omega_0 t)$,
reell: $y^*(t) = \frac{A}{2\omega_0}\, t\sin(\omega_0 t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty$

Amplitude $\to \infty$ "Resonanzkatastrophe"

Falls $\omega \neq \omega_0$: " hat Lsg. $\frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2}\exp(i\omega t)$

Für $\sigma \neq 0$: Falls $\omega_0^2 - 2\sigma^2 < 0 \iff \omega_0 < \sqrt{2}\,\sigma$ "starke Dämpfung": Max. von $|\gamma(\omega)|$ für $\omega^* = 0$
mit $|\gamma(0)| = \frac{A}{\omega_0^2}$, und $|\gamma(\omega)| \xrightarrow{\omega\to\infty} 0$.