Vorlesung Analysis II — SoSe '25 hhu

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen — K. Halupczok

an22: Der Satz von Picard-Lindelöf

Stichworte: Fixpunktsatz von Weissinger, Satz von Picard-Lindelöf

Literatur: [Heuser], §12

22.1. **Einleitung:** Mit dem Fixpunktsatz von Weissinger zeigen wir den Satz von Picard-Lindelöf.

22.2. **Motivation:** Die DGL $y' = f(x,y)$ wird auf eindeutige Lösbarkeit hin untersucht.

22.3. **Fixpunktsatz von Weissinger:** Vor.: Sei $\emptyset \neq U \subseteq V$, $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter $\mathbb{R}$-VR, ferner sei U in V abg. Weiter sei $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ eine konvergente Reihe, alle $\alpha_n > 0$, und $A : U \to U$ eine Abb. so, dass

$$\forall u, v \in U \ \forall n \in \mathbb{N}: \ \|A^n u - A^n v\| \le \alpha_n \|u - v\|.$$

Beh.:

(a) Dann ex. genau ein Fixpunkt $\tilde{u}$ von A, d.h. es ex. genau ein $\tilde{u}$ mit $A\tilde{u} = \tilde{u}$.

(b) Dieser Fixpunkt ist Grenzwert der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wo $u_0 \in U$ bel. und $u_n := A^n u_0$.

(c) Es gilt die Fehlerabschätzung $\|\tilde{u} - u_n\| \le \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_j \|u_1 - u_0\|$.

Bew.: Haben $\|u_{n+1} - u_n\| = \|A^n u_1 - A^n u_0\| \le \alpha_n \|u_1 - u_0\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

also $\|u_{n+k} - u_n\| \le \|u_{n+k} - u_{n+k-1}\| + \|u_{n+k-1} - u_{n+k-2}\| + \ldots + \|u_{n+1} - u_n\|$

$$\le \underbrace{(\alpha_{n+k-1} + \alpha_{n+k-2} + \ldots + \alpha_n)}_{\to 0 \text{ für } n,k\to\infty} \cdot \|u_1 - u_0\|, \qquad (*)$$

also ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Da U als abg. Teilmenge des vollst. normierten Raumes V selbst vollständig ist (wegen 12.6), kgt. die Folge in U, und hat einen GW $\tilde{u} \in U$. Wegen $\|u_{n+1} - A\tilde{u}\| = \|Au_n - A\tilde{u}\| \le \alpha_1 \|u_n - \tilde{u}\| \to 0$ folgt, dass $u_n \to A\tilde{u} = \tilde{u}$, also ist $\tilde{u}$ Fixpunkt von A. Wäre v ein weiterer Fixpunkt, gilt $v = Av = A^2 v = \ldots$ und mit $\tilde{u} = A\tilde{u} = A^2\tilde{u} = \ldots$ folgt $\|\tilde{u} - v\| = \|A^n \tilde{u} - A^n v\| \le \alpha_n \|\tilde{u} - v\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \cdot \|\tilde{u} - v\| = 0$, also ist $v = \tilde{u}$ und $\tilde{u}$ eind. Es folgt (a), (b). Mit $k \to \infty$ in $(*)$ folgt noch die Fehlerabschätzung (c). □

Wir erhalten nun den zentralen Satz:

22.4. Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf:

Vor.: Sei $R := \{(x,y);\ |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b\}$ für $a, b, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $a,b>0$,
sei $f: R \to \mathbb{R}$, $f(x,\cdot)$ stetig diff'bar (oder schwächer:
$\exists L > 0: \ |f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \le L \cdot |y - \tilde{y}|$ für alle $(x,y), (x,\tilde{y}) \in R$.) Lipschitz-bedingung

(a) Dann besitzt die AWA $y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$
genau eine auf $j := [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ definierte Lsg. $y(x)$,
wobei $\alpha := \min(a, \frac{b}{M})$, $M := \max\limits_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$.

(b) Dabei kann $y(x)$ iterativ gewonnen werden:
wähle bel. Fkt. $\varphi_0 \in K := \{u \in \mathcal{C}^0(j);\ |u(x) - y_0| \le b$ für alle $x \in j\}$,
setze $\varphi_n(x) := y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\, dt$ für $n \in \mathbb{N}$, $x \in j$,
so gilt $\varphi_n \rightrightarrows y$ glm. auf j. ↖ "Picard-Iteration"

(c) Man hat die Fehlerabschätzung
$$|y(x) - \varphi_n(x)| \le \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\alpha L)^k}{k!}\Big) \cdot \max_{x \in j} |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)|,$$
oder etwas gröber:
$$|y(x) - \varphi_n(x)| \le \frac{(\alpha L)^n}{n!} e^{\alpha L} \cdot \max_{x\in j} |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)|.$$
[denn $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \le \frac{x^n}{n!} e^x$] $\frac{x^n}{n!} \cdot x^{k-n} \cdot \frac{n!}{k!}$

22.5. Bem.: Ohne weiteres können wir im Satz 22.4 auch j durch irgendein kompaktes IV $[c,d]$ ersetzen, und K durch $\mathcal{C}^0([c,d])$. Dann ist $\alpha := \max(x_0 - c, d - x_0)$.

22.6. Bew.: Nimm $V = \mathcal{C}^0(j)$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$, wo $\|y\|_\infty := \max\limits_{x\in j} |y(x)|$,
sowie $U := K$ und A die Abb. $(Ay)(x) := y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$ für jedes $x \in j$.
Dann gilt $A: U \to U$, denn
$$|(Ay)(x) - y_0| \le |x - x_0| M \le \alpha M \le b \text{ für alle } x \in j = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha].$$
Haben $|(A^n u)(x) - (A^n v)(x)| \le \frac{|x-x_0|^n}{n!} L^n \|u - v\|_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in j$ (induktiv),
also $\|A^n u - A^n v\|_\infty \le \frac{(\alpha L)^n}{n!} \|u - v\|_\infty$.
Der Rest folgt aus dem Fixpunktsatz von Weissinger 22.3, samt der glm. Kgz. der φ_n gegen den Fixpkt. y, für den $y' = f(x,y)$ gilt, und der Fehlerabsch. □

22.7 **Bsp.:** Lösen iterativ die AWA $y' = xy$, $y(0) = 1$. $\rightsquigarrow x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Nimm $R = [-a, a] \times [1-b, 1+b]$, $a, b > 0$.

Für $f(x,y) := xy$ gilt die Lipschitzbedingung mit $L = a$,
denn $|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| = |xy - x\tilde{y}| = |x| \cdot |y - \tilde{y}| \le a\,|y - \tilde{y}|$
für alle $(x,y), (x,\tilde{y}) \in R$.

Haben weiter $M = \max\{|xy|;\ (x,y) \in R\} \le a(1+b)$, $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(a, \frac{b}{a(1+b)}\right)$.

Wähle φ_0 als konstante Fkt. $\varphi_0(x) := 1$ $(= y_0)$ für alle $x \in j \in [-\alpha, \alpha]$.

Haben weiter

$$\varphi_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\,dt = 1 + \int_0^x t\,\varphi_{n-1}(t)\,dt, \quad x \in j,$$

also sukzessive $\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x t\,dt = 1 + \frac{1}{2}x^2$,

$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x t \cdot (1 + \frac{1}{2}t^2)\,dt = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 4}x^4$

$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x t \cdot (1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2\cdot 4}t^4)\,dt = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}x^6, \ldots$

also induktiv $\varphi_n(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots + \frac{1}{2^n n!}x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k$,

was auf R glm. gegen $y(x) = e^{x^2/2}$ konvergiert, $x \in j$.

Dies ist genau die Lsg. der AWA: $y(0) = e^{0^2/2} = 1$ ✓ und $y'(x) = e^{x^2/2} \cdot x = xy$. ✓

Die Lsg. ist auch Lsg. für alle $x \in \mathbb{R}$.

22.8 **Bem.:** 1. Dass das Rechteck so gewählt ist, dass (x_0, y_0) der Mittelpunkt ist, diente der äußerlichen Beweisvereinfachung und ist nicht wesentlich, vgl. Bem. 22.5.

2. Der Satz ist ein "globaler" Satz, er gilt i.a. nicht, wenn die Lipschitzbed. nur "lokal" gilt.

3. Die Iterationsfolge (φ_n) lässt sich auch ohne Lipschitzbedingung bilden, allerdings kann es sein, dass diese dann keine Lsg. der DGL / AWA liefert. (Bsp. [Heuser §12, Aufgabe 5])

4. Die DGL $y' = f(x,y)$ kann als mehrdimensionales Problem betrachtet werden, wenn man allgemeiner $y \in \mathbb{K}^n$, $x \in \mathbb{R}$, und $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_n(x,y) \end{pmatrix}$ zulässt, d.h. $y' = f(x,y) \iff \left\{ \begin{matrix} y_1'(x) = f_1(x,y) \\ \vdots \qquad \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x,y) \end{matrix} \right\}$ ist ein DGL-System 1. Ordnung.

Satz 22.4 gilt dann genau analog, der Beweis verläuft ebenso analog.