Vorlesung Analysis II — SoSe '25 hhu
Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen — K. Halupczok

an23: Differentialgleichungssysteme

Stichworte: DGLsysteme (linear 1. Ordnung, Konstante Koeff.), Jordan-Normalform

[Literatur: frühere Vorlesung in Lineare Algebra II, Kapitel la14.]

23.1. Einleitung: Wir lösen DGLsysteme 1. Ordnung (linear mit konstanten Koeffizienten) durch Anwenden des Satzes von der Jordan-Normalform aus der Linearen Algebra II.

23.2. Motivation: Manche DGLn, etwa lineare höherer Ordnung, lassen sich in DGLsysteme umformen und in Matrixform bzw. mit Funktionen bestehend aus mehreren Komponenten kurzgefasst notieren und lösen.

23.3. Vereinbarung: $y: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ sei eine Funktion auf $\mathbb{R}$ (der Zeit x) nach $\mathbb{C}^n$, (man könnte t schreiben)

die Komponentenfunktionen $y_1, \dots, y_n$ seien stetig diff'bar.

Dazu sei $y': \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $x \mapsto y'(x) := \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}$ die Ableitung. Sie ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Weiter sei $A := (\alpha_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine fest gewählte $n \times n$-Matrix.

23.4. Bezeichnung: (i) Wir nennen die Abb. $D: y \mapsto D(y) := y' - Ay$,
d.h. $(D(y))(x) := y'(x) - A \cdot y(x)$,
einen linearen Differential-Operator erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

(ii) Für eine stetige Funktion $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $x \mapsto b(x) := \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$

heißt $\boxed{D(y) = b}$, d.h. $\boxed{y' = Ay + b}$ ein <u>lineares Differentialgleichungssystem</u> <u>erster Ordnung</u> $\underbrace{\text{(mit Konstanten Koeffizienten)}}$.

↝ d.h. maximal erste Ableitungen kommen vor

die Einträge von A sind konstant, d.h. keine veränderlichen Funktionen in x

Ist $b(x) \equiv 0$ (konstant-0-Fkt.) so reden wir von einem <u>homogenen System</u>, sonst von einem <u>inhomogenen System</u>.

23.5. <u>Bem.:</u> Haben $D \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n), \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n))$ als Homomorphismus zwischen Funktionenräumen (sind ja $\mathbb{R}$-VRe), was die Benennung "linearer Differentialoperator" rechtfertigt. In der Funktionalanalysis heißen Abb.en zwischen Funktionenräumen <u>Operatoren</u>.

Die Struktur der Lösungsmenge erhält man aus der linearen Algebra I:

23.6. <u>Lemma:</u> Ist <u>y_P (irgend) eine (partikuläre / spezielle) Lösung</u> des inhomogenen Systems $Dy = b$, d.h. von $y' - Ay = b$, so ist <u>$\mathbb{L}(D; b) := \{y_P + y_H;\ y_H \in \ker D\}$</u> die <u>Gesamtheit aller Lösungen</u>. Dabei besteht <u>$\ker(D)$</u> aus allen <u>Lösungen der homogenen Gleichung $Dy_H = 0$</u>, d.h. von $y_H' - Ay_H = 0$.

<u>Bew.:</u> Vgl. Vorl. zur <u>LA I</u>, bzw. <u>$y \in \mathbb{L}(D; b)$</u> $\Longleftrightarrow$ <u>$y - y_P \in \ker(D) = D^{-1}(\{0\})$</u>. □

Die homogene Gleichung hat folgende Eigenschaft.

23.7. <u>Lemma:</u> Ist y Lösung von $Dy = 0$, d.h. ist <u>$y' = Ay$</u> (d.h. y ist homogene Lsg.), und ist $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von y, d.h. <u>$y(x_0) = 0$</u>, so ist <u>$y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$</u>, d.h. $y(x) \equiv 0$ konstant $= 0$.

Bew.: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $y'(t) = Ay(t)$, so dass $y_i'(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, y_j(t)$ für $i = 1, \dots, n$ ist.
Durch Integration folgt

$$y_i(x) = y_i(x_0) + \int_{x_0}^{x} y_i'(t)\,dt = 0 + \int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, y_j(t)\,dt.$$

Mit $\eta(x) := \max\{\ \max\{|y_i(t)|;\ \text{für } t \text{ mit } |t - x_0| \le |x - x_0|\};\ i = 1, \dots, m\}$
und $a := \max\{|\alpha_{ij}|;\ \text{alle } i,j\}$ ist damit

$$0 \le \eta(x) \le \int_{x_0}^{x} m \cdot a \cdot \eta(t)\,dt \le \eta(x) \cdot m \cdot a \cdot |x - x_0|.$$

Ist x so nahe bei x_0, dass $ma|x - x_0| < 1$, folgt daraus notwendig $\eta(x) = 0$,
also auch $\eta(t) = 0$ für $|t - x_0| < |x - x_0|$.
Dieser Schluss ist $\underbrace{\text{iterierbar}}$ und zeigt, dass notwendig $y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
erst: $y(x) = 0$ für alle x nahe x_0, dann alle x (induktiv) erreichbar... □

23.8. **Folgerung:** (i) Für jedes $y_0 \in \mathbb{C}^n$ hat das Anfangswertaufgabe $Dy = b$, $y(0) \overset{!}{=} y_0$, höchstens eine Lösung.
(ii) Die Abbildung $\varphi : \ker D \to \mathbb{C}^n$, $y \mapsto y(0)$, ist injektiv, und damit ist $\dim \ker D \le m$.

23.9. **Bem.:** Tatsächlich gibt es bei (i) stets eine Lösung, dann also eindeutig. Denn:
Mit 23.10. sehen wir, dass φ bijektiv ist und dann $\dim \ker D = m$ ist.

Bew.: (i): Sind y_1, y_2 Lösungen von $Dy = b$, jeweils mit $y_1(0) = y_0 = y_2(0)$,
so gilt für $y := y_1 - y_2$:

$$Dy = D(y_1 - y_2) = Dy_1 - Dy_2 = b - b = 0,$$
$$y(0) = y_1(0) - y_2(0) = y_0 - y_0 = 0,$$

so dass $y_1(x) = y_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt nach Lemma 23.7.
(ii): Stimmen zwei Lösungen von $Dy = 0$ an der Stelle $x_0 = 0$ überein,
so sind sie nach (i) identisch. Dies sagt gerade, dass φ injektiv ist. □

Nun zeigen wir folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

23.10. **Satz:** Die Abbildung $\varphi : \ker D \to \mathbb{C}^m$, $y \mapsto y(0)$, ist auch surjektiv und damit bijektiv, d.h. zu jedem $y_0 \in \mathbb{C}^n$ gibt es genau eine Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe $Dy = y' - Ay = 0$, $y(0) = y_0$.

Mit Folgerung 23.8 ist dies äquivalent dazu, dass $Dy=0$ genau n linear unabhängige Lösungen besitzt. Wir führen den Beweis schrittweise.

23.11. **Reduktion:** Es genügt, die Aussage im Fall zu beweisen, wenn A in JNF vorliegt!
Jordan-Normalform

Bew.: Ist $y'=Ay$ und G eine (konstante) invertierbare Matrix ($\in \mathbb{C}^{n\times n}$), so ist für die Funktion $z:=G^{-1}y$, also $z(t)=G^{-1}\cdot y(t)$, die Ableitung dann $z'=G^{-1}y'$, und damit $z'=G^{-1}y'=G^{-1}AGG^{-1}y=G^{-1}AGz$, folglich z Lösung von $z'=(G^{-1}AG)z$, wobei man den AW $z(0)=G^{-1}y(0)$ hat. Es genügt also, die Beh. für das transformierte System zu beweisen, und dabei kann man durch Wahl von G die Matrix $G^{-1}AG$ in JNF erreichen laut Satz der Linearen Algebra II zur Jordan-Normalform. $\square$

23.12. **Spezialfall:** Die Matrix A habe JNF mit genau einem Jordan-Kasten

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n + E_n, \text{ wo } I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1,1,\dots,1)$$

$$\text{und } E_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots\ 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \text{ ein Eigenwert von } A.$$

Dann sind die Spalten der Matrix

$$C(x) := e^{\lambda x}\cdot \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2! & x^3/3! & \cdots \\ 0 & 1 & x & x^2/2! & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \end{pmatrix}_{n,n}$$

eine Basis von $\ker D$, d.h. der Lösungen von $z'=Az$.

Bew.: Zu betrachten ist $z'(x)=Az(x)=(\lambda I_n+E_n)\,x(t)$.
Mit einem noch zu bestimmenden Vektor $c(x)=\begin{pmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_n(x)\end{pmatrix}$ setzen wir an: $z(x):=e^{\lambda x}\cdot c(x)$.
Dies ergibt für alle x die zu erfüllende Gleichung

$$z'(x)=\underbrace{e^{\lambda x}(\lambda c(x)+c'(x))}_{\text{laut Produktregel}} \stackrel{!}{=} (\lambda I_n+E_n)e^{\lambda x}c(x)=e^{\lambda x}(\lambda c(x)+E_n c(x))$$

$$\iff c'(x)=E_n c(x).$$

In Komponenten aufgeschrieben lautet die letzte Gleichung: $c_i'(x) = \begin{cases} c_{i+1}(x), & i<m, \\ 0, & i=m, \end{cases}$

und die Spalten der obennotierten Matrix C sind offenbar Lösungen dieser Gleichung. Da C invertierbar ist, sind sie linear unabhängig und mit Folgerung 23.8 also eine Basis.

23.13 Allgemeiner Fall: Sei A in (beliebiger) JNF gegeben, also als $A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$ mit Jordan-Kästen $J_1, \dots, J_k$. Zu jedem Jordan-Kasten J_i bilde man entsprechend dem Spezialfall 23.12 die zugehörige Matrix $C_i(x)$ und ordne alle diese Matrizen an zur neuen Matrix

$$C(x) = \begin{pmatrix} C_1(x) & & \\ & C_2(x) & \\ & & \ddots & \\ & & & C_k(x) \end{pmatrix}.$$

Dann sind die Spalten von C linear unabhängig und Lösungen von $z' = Az$, womit auch Satz 23.10 gezeigt ist. □

23.14 Bem.: Die DGL $u^{(m)} + a_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f$ aus an21 kann mit der Substitution $y_1 = u$, $y_2 = u' = y_1'$, $y_3 = u'' = y_2', \dots, y_m = u^{(m-1)} = y_{m-1}'$ auf das System 1. Ordnung $y_1' = y_2$, $y_2' = y_3, \dots, y_{m-1}' = y_m$, $y_m' = -a_{m-1}y_m - a_{m-2}y_{m-1} - \dots - a_1 y_2 - a_0 y_1$ gebracht werden.
Satz 23.10 zeigt dann auch nachträglich Satz 21.27.

23.15 Beispiel: Wir möchten die folgende gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung lösen: $u''(x) = (\delta - q^2)u(x) + 2q\,u'(x)$ mit festen $\delta, q \in \mathbb{R}$.
Wir setzen $y_1 := u$, $y_2 := u'$, so dass also $y_1' = u' = y_2$, $y_2' = u''$.
Wir haben dann die Gleichungen
$$\left\| \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= (\delta - q^2)y_1 + 2q\,y_2 \end{aligned} \right\|$$
(Vgl. 20.3 und 21.35/40)
(simultan) zu lösen, also ein DGL-System von Diff'glen. 1. Ordnung wie in 23.4, denn mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta - q^2 & 2q \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ können wir es als $y' = Ay$ schreiben.

Zur Lösung ist nun die JNF der Matrix A zu bestimmen!
Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \delta - q^2 & 2q - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2q\lambda + (q^2 - \delta) = (\lambda - q)^2 - \delta.$$

Jetzt Fallunterscheidung, ob es einen einzigen oder zwei EWe gibt:

1. Fall: $\delta \neq 0$: Hier gibt es zwei verschiedene (unter Umständen nicht reelle) EWe λ_1, λ_2, nämlich $\lambda_{1/2} = q \pm \sqrt{\delta}$. Dazu gibt es zwei linear unabhängige EVen $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, und die Funktionen
$$y_1(x) := e^{\lambda_1 x} \cdot c_1$$
$$y_2(x) := e^{\lambda_2 x} \cdot c_2$$
bilden eine Basis des Lösungsraums von $y' = Ay$. (Vgl. 21.31, 1. und 3. Fall).

2. Fall: $\delta = 0$: Haben $\chi_A(T) = (T-q)^2$, also nur den einen EW $\lambda = q$.
Es ist $A - qI_2 = \begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & 2q-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & q \end{pmatrix}$ eine Matrix vom Rang 1.
Damit ist hier auch ihr Kern 1-dimensional.

Es gibt also genau einen 1-dim. Eigenraum, so dass notwendig ein (weiterer echter) Hauptvektor existiert!

Einen EV g_1 erhalten wir mit $g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}$ als Lösung von $\begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & q \end{pmatrix} v = 0$,
und einen HV g_2 erhalten wir mit $g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Lösung
von $\begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & q \end{pmatrix} v = g_1$,
und mit $G := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}$, $G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix}$, ist
$$J := G^{-1}AG = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix} \text{ die JNF.}$$

Zum transformierten Diff'gleichungssystem $z' = Jz$ haben wir dann als Lösungen die Spalten von $C(x) := e^{qx}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Für unser ursprüngliches System $y' = Ay$ erhalten wir daraus wegen $y = Gz$ als Lösungen die Spalten von
$$Y(x) := e^{qx}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{qx}\begin{pmatrix} 1 & x \\ q & qx+1 \end{pmatrix},$$
d.h. $y(x) = e^{qx}\begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\tilde{y}(x) = e^{qx}\begin{pmatrix} x \\ qx+1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix}$. Dies sind Lösungen:

Haben
$$\left.\begin{aligned} y_1'(x) &= q e^{qx} = y_2(x) \\ y_2'(x) &= q^2 e^{qx} = -q^2 e^{qx} + 2q \cdot q e^{qx} = -q^2 y_1(x) + 2q\, y_2(x) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^2 & 2q \end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} \checkmark$$
und
$$\left.\begin{aligned} \tilde{y}_1'(x) &= q e^{qx} x + e^{qx} = \tilde{y}_2(x) \\ \tilde{y}_2'(x) &= q e^{qx}(qx+1) + e^{qx} \cdot q = q^2 e^{qx} x + 2q e^{qx} \\ &= -q^2 x e^{qx} + 2q\, e^{qx}(qx+1) = -q^2 \tilde{y}_1(x) + 2q\, \tilde{y}_2(x) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^2 & 2q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1' \\ \tilde{y}_2' \end{pmatrix}$$

Dies stimmt überein mit dem Ergebnis aus 21.40(b), 2. Fall. ✓

Ende der Vorlesung "Analysis II"