Vorlesung Analysis II
Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

SoSe '25 hhu
K. Halupczok

an3: Konvergenz/Grenzwerte/Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Stichworte: Funktionsgrenzwerte, Stetigkeit (komponentenweise und partiell)

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.3

3.1. **Einleitung:** Wir definieren Funktionsgrenzwerte bei Funktionen f von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$.

3.2. **Situation/Vereinbarung:** Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $M \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}^m$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Als Norm benutzen wir die Maximumsnorm und schreiben deswegen $\|\cdot\|$ für $\|\cdot\|_\infty$. Weiter sei $a \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt zu/von M, d.h. $\forall \varepsilon > 0: \#\underbrace{\{x \in M;\ \|x-a\| < \varepsilon\}}_{=:\mathcal{U}_a^\varepsilon(M)} = \infty$ (vgl. An10.2).
← ε-Umgebung um a, vgl. 3.14

Dies bedeutet, dass a aus M heraus durch von a verschiedene Punkte $x \in M$ beliebig gut approximierbar ist, bzw. "man kommt mit Punkten aus M beliebig gut heran an a", und zwar aus "allen Richtungen", falls $\exists \varepsilon > 0: \mathcal{U}_a^\varepsilon(\mathbb{R}^n) \subseteq M$.

Wie in An10.4 definieren wir dann den Funktionsgrenzwert:

3.3. **Def.:** In Situation 3.2 gilt: $f(x) \longrightarrow b$ (für $M \ni x \to a$)
$$:\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M: 0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon.$$
Lesen: "$f(x)$ konvergiert gegen b, wenn x (aus M heraus) gegen a geht/konvergiert."
Wir nennen $b \in \mathbb{R}^m$ den Grenzwert (kurz: GW) von $f(x)$ für $M \ni x \to a$.
Notation ist: $f(x) \xrightarrow{M \ni x \to a} b$ oder $\lim\limits_{M \ni x \to a} f(x) = b$ oder $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = b$.

Umformulierung: $\|f(x) - b\| \xrightarrow{M \ni x \to a} 0$.

3.4. **Bem.:** Falls $M = D$ ist, hat die Bedingung "$x \in M$" keine weitere Bedeutung und kann weggelassen werden. Fehlt eine solche Bedingung, ist einfach $M = D$ gemeint.

3.5. Funktionsgrenzwerte können <u>komponentenweise</u> untersucht und gebildet werden:
Für $x \in D$ ist $f(x)$ ein Element des $\mathbb{R}^m$, also schreibbar in m Komponenten/Koordinaten
$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix},$$ den Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m : D \to \mathbb{R}$,
nämlich $\forall i \in \{1, \dots, m\} : f_i := pr_i \circ f$.

Mit $b = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ gilt dann:

Beh.: $f(x) \xrightarrow{M \ni x \to a} b \iff \forall i \in \{1, \dots, m\} : f_i(x) \to b_i \quad (M \ni x \to a)$
$\iff \forall i : |f_i(x) - b_i| \to 0 \quad (M \ni x \to a)$.

Bew.: Für $z = (z_1, \dots, z_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt $|z_i - b_i| \le \|z - b\|_\infty \le \sum_{i=1}^m |z_i - b_i|$. □

3.6. **Bem.:** Mit 3.5 kann man sich also auf die kgz. der Komponentenfunktionen zurückziehen, falls das nützlicher/schneller geht.

3.7. **Bsp.:** $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$, $f(v) := \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, wenn $v = \binom{x}{y} \in D$, also $f : D \to \mathbb{R}$.
Beh.: $f(v) \to 0$ (bei $D \ni v \to (0,0)^T =: o$).
Bew.: $|f(v) - 0| = |f(v)| \le \frac{\|v\|_2^2}{\|v\|_2} = \|v\|_2 \to 0$.
$\uparrow |xy| \le \max(x^2, y^2) = \|v\|^2 \le x^2 + y^2 = \|v\|_2^2$ □

3.8. **Bsp.:** $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$, $f(v) := \frac{xy}{x^2+y^2}$, wenn $v = \binom{x}{y} \in D$, also $f : D \to \mathbb{R}$.
Beh.: Es existiert kein $b \in \mathbb{R}$ mit $f(v) \to b$ (bei $v \to (0,0)^T = o$).
Bew.: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelten $f(x,0) = 0$ und $f(x,x) = \frac{1}{2}$, im Widerspruch zu 3.5. □

Wie im eindimensionalen Fall ist ein FunktionsGW mit Folgenkonvergenz beschreibbar:

3.9. **Bem.:** $f(x) \xrightarrow{M \ni x \to a} b$, wenn $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$, $\underbrace{x_n \xrightarrow{n \to \infty} a}_{\text{d.h. } \|x_n - a\| \xrightarrow{n \to \infty} 0}$: $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} b$ mit Folgenkgz. wie in an1.8

3.10. <u>Rechnen mit Grenzwerten</u> („GWSätze"):
$f(x) \to b$, $g(x) \to c$ $\Rightarrow (f \pm g)(x) \to b \pm c$, sofern bildbar
$\Rightarrow \langle f(x), g(x) \rangle \to \langle b, c \rangle$, sofern bildbar
$\Rightarrow \|f(x)\| \to \|b\|$

Wir kommen zur Stetigkeit von Funktionen $f: \mathcal{D}\to\mathbb{R}^m$, $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^n$.

3.11. <u>Def.:</u> Für $a\in\mathcal{D}$ heißt f <u>stetig in a</u> $:\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in\mathcal{D}: \|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow f(x)\to f(a)$ (bei $\mathcal{D}\ni x\to a$)

bzw. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\in\mathcal{D})}} f(x)=f(a)$.

3.12. <u>Bem.:</u> Die Forderung, dass a ein Häufungspunkt von $\mathcal{D}$ ist, wird hier nicht benötigt.

3.13. <u>Def.:</u> Sei $T\subseteq\mathcal{D}$. Dann: f heißt <u>stetig in T</u> $:\Leftrightarrow \forall z\in T$: f stetig in z

f heißt <u>stetig</u> $:\Leftrightarrow$ f stetig in $\mathcal{D}$

3.14. Zum Erkennen von stetigen Funktionen ist wieder folgende Grundregel zur Stetigkeit zusammengesetzter/verknüpfter Funktionen nützlich:

<u>Vor.:</u> $n, m, k\in\mathbb{N}$, $a\in\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^m$

$\mathcal{D}_1\subseteq\mathbb{R}^m$ mit $f(\mathcal{D})\subseteq\mathcal{D}_1$, $h:\mathcal{D}_1\to\mathbb{R}^k$,

$b := f(a)$, f in a stetig, h in b stetig.

<u>Beh.:</u> $h\circ f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^k$ ist in a stetig.

<u>Skizze:</u>

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "h\circ f"] & f(\mathcal{D})\subseteq\underbrace{\mathcal{D}_1}_{\subseteq\mathbb{R}^m} \arrow[r, "h"] & \mathbb{R}^k \\
a \arrow[u, phantom, "\in"] \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "h\circ f"'] & \underbrace{f(a)}_{=b} \arrow[u, phantom, "\in"] \arrow[r, mapsto] & h(\underbrace{f(a)}_{=b}) \arrow[u, phantom, "\in"]
\end{tikzcd}$$

<u>Bezeichnung:</u> $U_c^\rho := \{x\in\mathbb{R}^k : \|x-c\|<\rho\}$ heißt <u>ρ-Umgebung von c</u>

Bedeutung der Stetigkeit von $h\circ f$: eine η-Umgebung von a wird unter f in eine* δ-Umgebung von b, und diese dann unter h in eine* ε-Umgebung von $h(b)$ abgebildet. Dies ist auch der

<u>Bew.:</u>

Zu $\varepsilon>0$ ex. zunächst ein $\delta>0$ so, dass $\|h(z)-h(b)\|<\varepsilon$ (bei $z\in\mathcal{D}_1$, $\|z-b\|<\delta$).

Zu $\delta>0$ ex. nun ein $\eta>0$ so, dass $\|f(x)-f(a)\|<\delta$ (bei $x\in\mathcal{D}$, $\|x-a\|<\eta$).

Für solche x gilt also $\|h(f(x))-h(f(a))\|<\varepsilon$. Also ist $h\circ f$ stetig in a. $\square$

*gemeint ist: ... in eine <u>Teilmenge</u> einer ...

3.15. Bch. 3.5 liefert nun mit 3.14, dass Stetigkeit und Komponentenweise Stetigkeit (d.h. mit den Komponentenfunktionen) äquivalent sind:

Bch: f stetig in a $\iff$ $\forall i \in \{1,\dots,m\}$: f_i stetig in a. (Beachte $f_i = pr_i \circ f$ und 3.20)

Bew.: „$\Rightarrow$": klar mit 3.14/3.20, „$\Leftarrow$": Wähle $(x_k) \subseteq D$ mit $x_k \to a$. Dann: $\forall i$: $pr_i(f(x_k)) \to pr_i(f(a))$, da die $pr_i \circ f = f_i$ stetig. Nach 3.5 gilt dann $f(x_k) \to f(a)$, d.h. f ist stetig in a laut 3.11. □

Die GWSätze 3.10 zeigen:

3.16. Kor.: Linearkombinationen stetiger Funktionen (insbesondere Summen und Differenzen) und (soweit bildbar) Skalarprodukte und Normen stetiger Funktionen sind wieder stetig. ↳ Vgl. $|\|x\|-\|y\|| \le \|x-y\|$, Ü

3.17. Triviales Bsp: $b \in \mathbb{R}^m$, die Konstante Fkt. $f(x) := b$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist stetig.

Trivialität: f stetig, $T \subseteq D \Rightarrow f{\restriction}T$ stetig.

3.18. Satz: Jede Lineare Abb. $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (im Sinne der linearen Algebra, s. Anhang 22 in an 1) ist stetig.

Bew.: Sei A durch die $m \times n$-Matrix $(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ beschrieben, schreibe auch A für diese Matrix. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $b := Ax$ ist dann $b_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j$, wo $1 \le i \le m$.

Schätzen ab: $|b_i| \underset{\text{Δ-Ungl.}}{\le} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|\cdot|x_j| \le \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|\cdot\|x\|$, also $\|Ax\| \le K\cdot\|x\|$ mit $K := \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|$.

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt somit $\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \le K\cdot\|x-y\|$, es folgt die Bch. □

3.19. Bsp.: $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$, $\cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\alpha,x) \mapsto \alpha\cdot x$, $^1\!/ : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ sind stetige Abb.

3.20. Kor.: $\forall i$: $pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \mapsto x_i$ ist stetig! Da linear! (Spezialfall von 3.18)

3.21. Haben Zusammenhang zwischen FunktionsGWen und Stetigkeit, genau wie in An 10.4:

Vor.: $\tilde{f} := \begin{cases} f \text{ auf } M \setminus \{a\}, \\ b \text{ für } x = a \end{cases}$

Beh.: $f(x) \longrightarrow b$ bei $M \ni x \to a \iff \tilde{f}$ stetig in a.

3.22. Partiell stetigkeit (d.h. Stetigkeit in einer Variablen, wenn die anderen „festgehalten" werden):

f stetig, $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ fest $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $f(\cdot, a_2, \dots, a_n)$ stetig und $f(a_1, \cdot, a_2 \dots a_n)$ stetig und … und $f(a_1, \dots, a_{n-1}, \cdot)$ stetig.

Bem.: die Umkehrung gilt nicht:

Bsp.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$

das Bsp. 3.8.

Diese Fkt. f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
weiter sind $f(0,\cdot)$ und $f(\cdot,0)$ stetig,
d.h. f ist partiell stetig, aber nicht stetig in $a = (0,0)$:
Haben $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$, aber $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$.

3.23. Bsp.: Für $f(x,y) := \frac{x-y}{x+y}$ gilt $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x,y) = 1$, $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = -1$,
denn $\lim\limits_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y} = -1$.

Weiter: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ex. nicht, da $\lim\limits_{n\to\infty} f(\underbrace{\tfrac{1}{n}, 0}_{x_n = \frac{1}{n},\, y_n = 0}) = 1$

aber $\lim\limits_{n\to\infty} f(\underbrace{0, \tfrac{1}{n}}_{x_n = 0,\, y_n = \frac{1}{n}}) = -1 \neq 1$.

Also: f partiell stetig,
aber nicht stetig (fortsetzbar) in $(0,0)$.