Vorlesung Analysis II — SoSe '25 hhu

Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ — K. Halupczok

an 4: Mehrdimensionales Ableiten

Stichworte: Richtungsableitung, partielle Ableitung, totale Ableitung, Klein-o

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.4

4.1. Einleitung: Wir führen den Differenzierbarkeitsbegriff für Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein: Über Richtungsableitungen entlang der Koordinatenachsen gelangen wir zu partiellen Ableitungen. Wir definieren die totale Ableitung und sehen, wie diese mit den partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen berechnet werden kann. Die "Linearisierung" von f ergibt also die Matrix $Df(a) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so, dass $f(x) \approx f(a) + Df(a)\cdot(x-a)$ in guter Näherung ist.

4.2. Konvention: Betrachten Funktionen $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ mit $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sei $a \in \mathcal{U}$ ein innerer Punkt von $\mathcal{U}$, d.h. $\exists\, \delta > 0: \mathcal{U}_a^\delta \subseteq \mathcal{U}$.

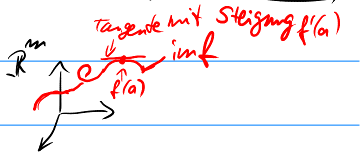
Man könnte $\mathcal{D}$ für die Definitionsmenge von f schreiben, tun dies aber wegen Verwechslungsgefahr mit den anderen D's in diesem Kapitel lieber nicht.

4.3. Hatten: im Fall $n = m = 1$ ist $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ die Ableitung. $(\mathbb{R} \supseteq \mathcal{U} \ni x \to a)$

4.4. Falls $n > 1$, ist $x-a$ ein Vektor und der Differenzenquotient nicht bildbar.

4.5. Falls $n = 1$, $m \geq 1$, ist $\underbrace{\frac{1}{x-a}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{(f(x)-f(a))}_{\in \mathbb{R}^m}$ der (m-dimensionale) Differenzenquotient $\in \mathbb{R}^m$,

und $Df(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ die Ableitung. $(\mathbb{R} \supseteq \mathcal{U} \ni x \to a)$



Sind $f_1, \dots, f_m$ die Komponentenfunktionen von f, d.h. $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$ für alle $x \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$, also die $f_i: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $f_i := pr_i \circ f$, so ist

$$\frac{1}{x-a}\cdot(f(x)-f(a)) = \frac{1}{x-a}\cdot\begin{pmatrix} f_1(x)-f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(x)-f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f_1(x)-f_1(a))/(x-a) \\ \vdots \\ (f_m(x)-f_m(a))/(x-a) \end{pmatrix} \xrightarrow{x\to a} \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix},$$

falls alle Komponentenfunktionen f_i diff'bar in a sind.

Wir erhalten $Df(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ in diesem Fall und schreiben auch $f'(a)$ für $Df(a)$.

4.6. **Bsp.:** Betrachten $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $f(x):=\begin{pmatrix}x\\x^2\end{pmatrix}$. Also: $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$, $f_1'(x)=1$, $f_2'(x)=2x$, wir erhalten $f'(a)=\begin{pmatrix}f_1'(a)\\f_2'(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2a\end{pmatrix}$ für $a\in\mathbb{R}$.

4.7 **Fall $m>1$:** Mit $a\in U\subseteq\mathbb{R}^n$ und $f:U\to\mathbb{R}^m$ und der Konvention, dass a ein innerer Punkt von U ist, können wir uns mit $x\in U$ aus verschiedenen Richtungen an a annähern. Ist etwa $v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ ein Vektor, der uns die "Richtung" der Ableitung angeben soll, so wollen wir f "in diese Richtung" ableiten, d.h. die Funktion $\begin{cases} f_v: \,]-\delta,\delta[\,\to\mathbb{R}^m \\ t\mapsto f(a+tv)\end{cases}$
in $(t_0=)\,0$ ableiten, und haben die Fragestellung auf 4.5 zurückgeführt.
Dabei ist $\delta>0$ geeignet so, dass $U_a^{\delta\|v\|}\subseteq U$ ist (damit auch $a\pm\delta v\in U$ ist).
Hier ist es üblich, den Richtungsvektor auf 1 zu normieren, d.h. $\|v\|=1$ vorauszusetzen, damit wir in der Bedingung an δ einfach $U_a^\delta\subseteq U$ schreiben können.

4.8. **Def.:** Das Ergebnis $D_v f(a):=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\big(f(a+tv)-f(a)\big)\in\mathbb{R}^m$, d.h. $D_v f(a):=f_v'(0)$, heißt Richtungsableitung von f in a in Richtung v.
Diese beschreibt also das Wachstum von f entlang der Geraden $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$
$g(t):=a+tv$ (in Parameterform mit $t\in\mathbb{R}$ als Parameter).

4.9. **Bsp.:** • $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x+y\\x-y\\2x^2\end{pmatrix}$ soll in $a=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ abgeleitet werden, und zwar entlang $v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (es sei $\|\cdot\|=\|\cdot\|_\infty$).

Dazu bilden wir $f_v: t\mapsto f(a+tv)=f\begin{pmatrix}-3+t\\4+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2t\\-7\\2(-3+t)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{v,1}(t)\\f_{v,2}(t)\\f_{v,3}(t)\end{pmatrix}$, $f_{v,1}'(t)=2$, $f_{v,2}'(t)=0$, $f_{v,3}'(t)=4(-3+t)$
deren Ableitung ist
$$D_{\binom{1}{1}}f\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=f_{\binom{1}{1}}'(0)=\begin{pmatrix}2\\0\\4\cdot(-3+0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-12\end{pmatrix}.$$

• Dasselbe f soll entlang der Koordinatenachsen $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=:e_1$ und $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=:e_2$ in $a=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ abgeleitet werden. Haben $f_{e_1}: t\mapsto f(a+te_1)=f\begin{pmatrix}-3+t\cdot 1\\4+t\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t\\-7+t\\2(-3+t)^2\end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $f_{e_1,1}'(t)=1$, $f_{e_1,2}'(t)=1$, $f_{e_1,3}'(t)=4(-3+t)$

mit Abl. $D_{e_1}f\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=f_{\binom{1}{0}}'(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\-12\end{pmatrix}$,

und mit $f_{e_2}: t\mapsto f(a+te_2)=f\begin{pmatrix}-3+t\cdot 0\\4+t\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t\\-7-t\\18\end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $f_{e_2,1}'(t)=1$, $f_{e_2,2}'(t)=-1$, $f_{e_2,3}'(t)=0$

mit Ableitung $D_{e_2}f\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=f_{\binom{0}{1}}'(0)=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

4.10. **Def.:** Für $j \in \{1,\dots,n\}$ heißt
die Richtungsableitung $D_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := D_{e_j} f(a) \in \mathbb{R}^m$
von f in a in Richtung des j-ten kanonischen Einheitsvektors $e_j = (0,\dots,0,\overset{\text{Stelle } j}{1},0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$
(d.h. in Richtung der j-ten Koordinatenachse)

die j-te partielle Ableitung von f in a.

4.11. **Bem.:** • Für $m=1$ erhält man diese Ableitung $\in \mathbb{R}$ durch Ableiten nach der j-ten Variable,
denn $D_{e_j} f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(a+te_j) - f(a)\big)$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(\dots, a_{j-1}, \overset{\text{Stelle } j / j\text{-te Variable}}{\underline{a_j + t\cdot 1}}, a_{j+1}\dots) - f(\dots, a_{j-1}, \overset{\text{Stelle } j / j\text{-te Variable}}{\underline{a_j}}, a_{j+1},\dots)\Big),$$

4.12. **Bsp.:** $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2x + y^3 - z^2$. Sei $j \in \{1,2,3\}$, $a = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
Dann ist $D_{e_2} f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f\begin{pmatrix}u\\v+t\cdot 1\\w\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right)$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot\big(2u + (v+t)^3 - w^2 - (2u + v^3 - w^2)\big)$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot(t^3 + 3vt^2 + 3v^2t) = \underline{\underline{3v^2}} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right),$$

entsprechend $D_{e_1} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right) = \underline{\underline{2}}$, $D_{e_3} f\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial z}\left(\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right) = \underline{\underline{-2w}}$.

Denn offenbar ist $D_{e_1} f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2$, $D_{e_2} f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 3y^2$, $D_{e_3} f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = -2z$,
in diese partiellen Ableitungsfunktionen wird nur noch der Punkt $a = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$ eingesetzt.

4.13. **Bem.:** Ist $f: U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$, so erhält man die j-te partielle Ableitung
$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ durch Bilden der j-ten partiellen Ableitung der Komponentenfunktionen $f_1,\dots,f_m$,
nämlich: Ist $f = \begin{pmatrix}f_1\\\vdots\\f_m\end{pmatrix}$ mit $f_i: U \to \mathbb{R}$, $f_i = pr_i \circ f$,

$$\text{so ist } D_{e_j} f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot\left(\underbrace{\begin{pmatrix}f_1\\\vdots\\f_m\end{pmatrix}}_{f}(a+te_j) - \underbrace{\begin{pmatrix}f_1\\\vdots\\f_m\end{pmatrix}}_{f}(a)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot\begin{pmatrix}f_1(a+t\cdot e_j) - f_1(a)\\\vdots\\f_m(a+t\cdot e_j) - f_m(a)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}D_{e_j} f_1(a)\\D_{e_j} f_2(a)\\\vdots\\D_{e_j} f_m(a)\end{pmatrix}, \text{ bzw. } \frac{\partial f}{\partial x_j} = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\\\vdots\\\frac{\partial f_m}{\partial x_j}\end{pmatrix},$$ jede Komponente f_i wird nach der j-ten Variablen abgeleitet!

4.14. **Bsp.:** nochmal 4.9, d.h. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\binom{x}{y}\mapsto\begin{pmatrix}x+y\\x-y\\2x^2\end{pmatrix}$.
Es sollen die partiellen Ableitungen berechnet werden. Laut 4.13. ist (einfacher als in 4.9): $D_1 f\binom{x}{y}=\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}1\\1\\4x\end{pmatrix}$, $D_2 f\binom{x}{y}=\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$,
also $D_1 f\binom{-3}{4}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-12\end{pmatrix}$, $D_2 f\binom{-3}{4}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

4.15. **Beobachtung:** Kennt man alle partiellen Ableitungen, ist auf Anhieb nicht klar, ob die Funktion f "mehrdimensional" differenzierbar ist, denn f kann partiell diff'bar in Richtung aller $e_1,\dots,e_n$ in a sein, aber so, dass f noch nicht einmal stetig in a ist:

4.16. **Bsp.:** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f\binom{x}{y}=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0},\\ 0, & \text{falls } x=y=0,\end{cases}$ $a=\binom{0}{0}$. (Vgl. Bsp. 3.8.)

Die beiden partiellen Ableitungen sind $D_1 f\binom{0}{0}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\Big(f\binom{t}{0}-\underbrace{f\binom{0}{0}}_{=0}\Big)=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\cdot0=0$
und $D_2 f\binom{0}{0}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\Big(f\binom{0}{t}-\underbrace{f\binom{0}{0}}_{=0}\Big)=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\cdot0=0$,
aber $\lim\limits_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f\binom{x}{y}$ existiert nicht,
weil $f\binom{x}{0}\xrightarrow{x\to0}0$, aber $f\binom{x}{x}=\frac{1}{2}\xrightarrow{x\to0}\frac{1}{2}\neq0$.
hier ist $y=x$ gewählt, bzw. die Richtung $v=\binom{1}{1}$!

Aus verschiedenen Richtungen können verschiedene Funktionsgrenzwerte herauskommen, d.h. f ist unstetig in $a=\binom{0}{0}$, s. auch Bsp. 3.22.

4.17. Motivation:
Das richtige Konzept zum mehrdimensionalen Ableiten ist die totale Ableitung und ist die Verallgemeinerung von An1 14.3,

Erinnerung:

$f:U\to\mathbb{R}$ diff'bar in $a\in U\subseteq\mathbb{R}$, U ein offenes Intervall
$\Leftrightarrow \exists A\in\mathbb{R}\ \exists r:U\to\mathbb{R}$ stetig, $r(a)=0$: $f(x)=f(a)+A\cdot(x-a)+r(x)\cdot(x-a)$,
mit der Interpretation: $f(x)-f(a)-A(x-a)=r(x)\cdot(x-a)$
geht schneller gegen 0 als $|x-a|$.

Auch der Satz von Taylor An1 19.3 macht diese Aussage; nur wird dort "$r(x)\cdot(x-a)$" noch näher spezifiziert, was die Aussage der Diff'barkeit verfeinert.

Für eine Funktion, die "schneller gegen 0 geht als $|x-a|$", wird eine mehrdimensionale Definition wie folgt gegeben:

4.18. **Def.:** Für $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $x \in \mathcal{U}$, $a \in \mathcal{U}$ mit $\exists\, \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_a^\varepsilon \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ sei

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Norm im } \mathbb{R}^n}}{\varphi = o(\|x-a\|)} \;:\Longleftrightarrow\; \frac{1}{\|x-a\|} \cdot \varphi(x) \xrightarrow{x \to a} 0 .$$

Sprich: $\varphi(x)$ ist "Klein o" von $\|x-a\|$.

Diese Klein-o-Aussage ist eine Eigenschaft von φ.
Wenn das Symbol $o(\|x-a\|)$ in einer Formel vorkommt, steht dieses dort stellvertretend für eine Funktion, die diese "Klein-o"-Eigenschaft hat.

Somit geben wir die allgemeinste Def. für mehrdimensionale Diff'barkeit (für $\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$):

4.19. **Def.:** Geg. sei $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\exists\, \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_a^\varepsilon \subseteq \mathcal{U}$.

- Dann heißt f in a diff'bar
  $:\Longleftrightarrow \exists\, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:
  $$f(x) = f(a) + A \cdot (x-a) + o(\|x-a\|) \text{ auf } \mathcal{U}.$$
- Ist f in a diff'bar, dann heißt $f'(a) = Df(a) := A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die erste Ableitung bzw. totale Ableitung von f in a.

4.20. **Bem.:** Dabei ist A eind. bestimmt (laut Bem. 4.26 unten).

Beispiele: Hier sei stets $a \in \mathcal{U}$, $\exists\, \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_a^\varepsilon \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$.

4.21. **Bsp.:** f sei die Konstante Abb. $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto c$ mit $c \in \mathbb{R}^m$ fest.
Dann ist f in $a \in \mathcal{U}$ diff'bar und $f'(a) = \mathcal{O} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (die $m \times n$ – Nullmatrix!).

Bew.: $f(x) = c = c + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nullmatrix } \in \mathbb{R}^{m \times n}}}{\mathcal{O}} \cdot (x-a) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nullvektor } \in \mathbb{R}^m}}{o}$. $\square$

4.22. **Bsp.:** $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, d.h. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und $f(x) = Mx$ für $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Dann ist f in $a \in \mathbb{R}^n$ diff'bar und $f'(a) = M \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Bew.: $f(x) = Mx = M(x-a+a) = \underbrace{Ma}_{= f(a)} + M(x-a) + o$. $\square$

Spezielles Bsp.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $M := (1,1) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $f(x) = Mx = (1,1)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1 + \xi_2$
ist diff'bar in $a \in \mathbb{R}^2$ und $f'(a) = (1,1) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$.

4.23. **Bsp.:** $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \xi_1 \cdot \xi_2$, ist diff'bar in jedem $a = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,
und $f'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = (\alpha_2, \alpha_1) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

Bew.:
$$f(x) = \xi_1 \xi_2 = (\alpha_1 + (\xi_1 - \alpha_1))(\alpha_2 + (\xi_2 - \alpha_2))$$
$$= \alpha_1\alpha_2 + (\alpha_2, \alpha_1)\cdot\begin{pmatrix}\xi_1-\alpha_1\\ \xi_2-\alpha_2\end{pmatrix} + (\xi_1-\alpha_1)\cdot(\xi_2-\alpha_2)$$
$$= f(a) + (\alpha_2, \alpha_1)\cdot(x-a) + (\xi_1-\alpha_1)\cdot(\xi_2-\alpha_2)$$
mit $\|(\xi_1-\alpha_1)\cdot(\xi_2-\alpha_2)\| \le \left\|\begin{pmatrix}\xi_1-\alpha_1\\ \xi_2-\alpha_2\end{pmatrix}\right\|_\infty^2 = \|x-a\|_\infty^2 = o(\|x-a\|)$,
denn $\frac{1}{\|x-a\|}\cdot\|x-a\|^2 = \|x-a\| \xrightarrow{x\to a} 0$. □

4.24. **Bsp.:** $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, x\rangle$ ist diff'bar in jedem $a \in \mathbb{R}^n$,
und $f'(a) = \langle 2a, \cdot\rangle = 2a^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

Bew.:
$$f(x) = \langle x, x\rangle = \langle a + (x-a), a + (x-a)\rangle$$
$$= \langle a, a\rangle + 2\langle a, x-a\rangle + \langle x-a, x-a\rangle$$
$$= f(a) + 2a^T\cdot(x-a) + \underbrace{\|x-a\|_2^2}_{=o(\|x-a\|)}$$
✓ □

Erste Eigenschaften des eindimensionalen Differenzierens übertragen sich:

4.25. **Bem.:** f in a diff'bar $\Rightarrow$ f in a stetig.

Bew.:
$$\|f(x)-f(a)\|_\infty \le \underbrace{\|A(x-a)\|_\infty}_{\le n \max\limits_{i,j}|\alpha_{ij}|\cdot\|x-a\|_\infty \xrightarrow{x\to 0} 0} + \underbrace{\|o(\|x-a\|)\|_\infty}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0} \xrightarrow{x\to a} 0.$$
$A = (\alpha_{ij}) = Df(a)$ □

4.26. **Bem.:** f in a diff'bar $\Leftrightarrow$ $\forall\, i \in \{1, \dots, m\}$: $f_i = pr_i \circ f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ diff'bar in a
und dabei gilt:
$$f'(a) = \begin{pmatrix}f_1'(a)\\ \vdots\\ f_m'(a)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$
worin jede Ableitung $f_i'(a) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ ein Zeilenvektor ist. (Somit ist die Matrix $f'(a)$ eindeutig bestimmt).

Bew.: „$\Rightarrow$": $\forall\, i \in \{1, \dots, m\}$:
$$pr_i \circ f(x) = pr_i(f(x)) = pr_i(f(a)) + pr_i(f'(a)(x-a)) + pr_i(o(\|x-a\|))$$
(Ex. laut Vor.)
d.h. $f_i(x) = f_i(a) + f_i'(a)\cdot(x-a) + o(\|x-a\|)$.

„$\Leftarrow$":
$$f(x) = \begin{pmatrix}f_1(x)\\ \vdots\\ f_m(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_1(a) + f_1'(a)(x-a) + o(\|x-a\|)\\ \vdots\\ f_m(a) + f_m'(a)(x-a) + o(\|x-a\|)\end{pmatrix} = f(a) + \underbrace{\begin{pmatrix}f_1'(a)\\ \vdots\\ f_m'(a)\end{pmatrix}}_{=f'(a)}\cdot(x-a) + o(\|x-a\|).$$
□