Vorlesung Analysis II

SoSe '25 hhu
K. Halupczok

Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

an6: Mittelwertsatz und der Satz von Schwarz

Stichworte: MWS, stetig diff'bar, mehrfache partielle Ableitung, Satz von Schwarz

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.5

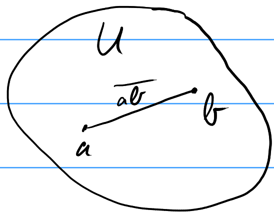
6.1. **Einleitung:** Der MWS wird für Skalarfelder verallgemeinert.

6.2. **Erinnerung:** Hatten den MWS: Vor.: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $]a,b[$ diff'bar.
Beh.: $\exists\, t \in\,]a,b[\, : \; f(b) - f(a) = f'(t) \cdot (b-a)$.

Dies ist so nicht übertragbar auf Abbildungen mit Werten in $\mathbb{R}^2$:
Betrachte $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \binom{\cos t}{\sin t} \in \mathbb{R}^2$ auf $[0, 2\pi]$.
Aber: $f(2\pi) - f(0) = 0 \neq \binom{-\sin t}{\cos t} \cdot 2\pi$, da $\left\| \binom{-\sin t}{\cos t} \right\|_2 = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

6.3. **Konvention/Vereinbarung:** Betrachte also nur $\mathbb{R}^1$-wertige Funktionen (d.h. Skalarfelder), die auf $U \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind, wo jeder Punkt $a \in U$ innerer Punkt von U ist.

Skizze:



Für je zwei Punkte $a, b \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei weiter die (Verbindungs-)Strecke $\overline{ab} \subseteq U$, wobei $\overline{ab} := \{a + t(b-a);\ t \in [0,1]\}$. $\Big\}$ U heißt dann **konvex**. (konvexe Menge)

6.4. **Mittelwertsatz:**
Vor.: Sei $\overline{ab} \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ wie in 6.3, $f: U \to \mathbb{R}$ in allen Punkten von $\overline{ab}$ diff'bar.
Beh.: $\exists\, c \in \overline{ab} \setminus \{a,b\}$ mit $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a) = \langle f'(c)^T, b-a \rangle$.
Bew.: Setze $h(t) := f(a + t(b-a))$, $h: [0,1] \to \mathbb{R}$,
$t \mapsto a + t(b-a) \xmapsto{f} h(t)$. Wende auf h den alten MWS An12.13 an:
$\exists\, \xi \in\,]0,1[$ mit $h(1) - h(0) = h'(\xi)(1-0)$
$\Rightarrow f(b) - f(a) = f'(a + \xi(b-a)) \cdot (b-a) = f'(c) \cdot (b-a)$
mit $c := a + \xi \cdot (b-a) \in \overline{ab} \setminus \{a,b\}$. $\square$

6.5. Dies liefert folgende Möglichkeit zur Fehlerabschätzung: Sei $b=a+\begin{pmatrix}\Delta\alpha_1\\ \Delta\alpha_2\\ \vdots\\ \Delta\alpha_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$.

Dann gilt: $|f(b)-f(a)| = |f'(c)(b-a)|$

$$= \left|\sum_{j=1}^{n} D_j f(c)\,\Delta\alpha_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} S_j\,|\Delta\alpha_j|,$$

wenn $|D_j f(c)|\le S_j$ mit $1\le j\le n$ ist.

Dies ist u. U. eine grobe Abschätzung für die Abweichung des Werts $f(b)$ von $f(a)$.

6.6. Folgerung: Vor.: Wie im MWS 6.4., aber $f:U\to\mathbb{R}^m$, $\max_{1\le i\le m}\|f_i'(c)^T\|_\infty \le M\in\mathbb{R}_{>0}$ für alle $c\in\overline{ab}\setminus\{a,b\}$.

Beh.: $\|f(b)-f(a)\|_\infty \le nM\cdot\|b-a\|_\infty$.

Bew.: Sei $i\in\{1,\dots,m\}$ so, dass $\|f(b)-f(a)\|_\infty = |f_i(b)-f_i(a)|$.

Mit dem MWS 6.4 folgt: $\exists\, c\in\overline{ab}\setminus\{a,b\}$ mit

$$|f_i(b)-f_i(a)| = |\underbrace{f_i'(c)}_{\in\mathbb{R}^{1\times n}}\cdot\underbrace{(b-a)}_{\in\mathbb{R}^n}| \underset{\text{C-S}}{\le} \|f_i'(c)^T\|_2\cdot\|b-a\|_2 \underset{\lceil\|v\|_2\le\sqrt{n}\|v\|_\infty\rfloor}{\le} nM\cdot\|b-a\|_\infty. \quad\square$$

Der MWS 6.4 liefert uns ein nützliches Kriterium zur Überprüfung der (totalen) Differenzierbarkeit:

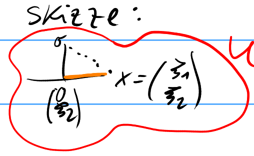
6.7. Satz: Vor.: $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $\forall c\in U$: c innerer Pkt. von U, $f:U\to\mathbb{R}^m$, f partiell diff'bar, alle partiellen Ableitungen seien in $a\in U$ stetig. ⚠

Beh.: f in a diff'bar, $f'(a)=(D_1f(a),\dots,D_nf(a))$.

Bew.: Sei OE $m=1$, OE $a=0$, OE $n=2$ (vollst. Ind.), OE $\|\cdot\|=\|\cdot\|_\infty$.

Ferner sei x so klein, dass $\overline{\begin{pmatrix}0\\ \xi_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}}\subseteq U$.

Skizze:



Dann gilt: $|f(x)-f(0)-(D_1f(0),D_2f(0))\,x|$

$$= \left|f\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} - f(0) - D_1f(0)\,\xi_1 - D_2f(0)\,\xi_2\right|$$

$$\underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\le} \left|\underbrace{f\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\ \xi_2\end{pmatrix}}_{\text{MWS 6.4}\leadsto\, = D_1f\binom{z_1}{\xi_2}\xi_1,\ z_1\in]0,\xi_1[} - D_1f(0)\,\xi_1\right| + \underbrace{\left|f\begin{pmatrix}0\\ \xi_2\end{pmatrix}-f(0)-D_2f(0)\,\xi_2\right|}_{=o(|\xi_2|),\text{ da die partielle Abl. (entlang }\xi_2)\text{ ex.}}$$

$$\le \underbrace{\left|D_1f\begin{pmatrix}z_1\\ \xi_2\end{pmatrix}-D_1f(0)\right|}_{\to 0\text{ für } 0<z_1<\xi_1\to 0,\text{ da } D_1f\text{ stetig in } 0}\cdot|\xi_1| + \underbrace{o(|\xi_2|)}_{=o(\|x\|_\infty),\text{ da } x\to 0\text{ betr. wird}} = o(\|x\|_\infty). \qquad\square$$

6.8. Def.: Wir nennen eine Funktion wie in 6.7. stetig diff'bar, d.h. wenn sie (partiell) diff'bar ist und so, dass alle partiellen Ableitungen stetig sind.
Ohne Stetigkeit der partiellen Ableitungen kann 6.7 nicht stimmen, vgl. 4.16. Ü

6.9. Wir untersuchen nun auch höhere Ableitungen. Dazu sei die Generalvoraussetzung:
Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$, $a \in U$, weiter sei
$U \mathbin{\text{⋐}} \mathbb{R}^n$ $:\Longleftrightarrow$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\forall c \in U$: c innerer Punkt von U,
d.h. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\forall c \in U$ $\exists \varepsilon > 0 : U_c^\varepsilon \subseteq U$.
Diese Bedingung kommt häufig vor. Wir sagen dann,
U ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (als Verallg. von "offenes IV").

6.10. Beobachtung: Falls f in a diff'bar, so haben wir

$$\begin{aligned} f' : U &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ a &\longmapsto f'(a) \end{aligned}$$

Falls f' in a diff'bar, so haben wir

$$\begin{aligned} f'' : U &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \\ a &\longmapsto A =: f'' \end{aligned}$$ (zweite Ableitung, eindeutig),

d.h.: $f'(x) = f'(a) + A \cdot (x-a) + o(\|x-a\|)$.
Für $h, k \in \mathbb{R}^n$ ist also $Ah \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, d.h. $(Ah)k \in \mathbb{R}^m$.
Betr. nun

$$\begin{aligned} \tilde{A} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (h, k) &\longmapsto (Ah)(k). \end{aligned}$$

Diese Abb. ist bilinear, schreibe daher: $A\,h\,k = \tilde{A}(h, k)$.

6.11. Ableitungen beziehen sich stets auf die Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$, vgl. 4.13.
Wir beschränken uns OE auf $m = 1$ und betrachten mehrfache partielle Ableitungen:
Vor.: Sei $f : U \to \mathbb{R}$, $U \mathbin{\text{⋐}} \mathbb{R}^n$, $D_i f$ existiere auf U, $D_i f : U \to \mathbb{R}$.

Falls $D_i f$ nach der j-ten Variablen diff'bar ist, so hat man:

$$D_j(D_i f) = D_j D_i f =: \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j \partial \xi_i} = f_{\xi_j \xi_i},$$

und für $i = j$ schreibe $\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = D_i^2 f$.

6.12 Induktiv erhalten wir beliebige höhere partiellen Ableitungen wie folgt:

Def.: Seien $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$, setze $p := p_1 + \dots + p_r$.
Dann heißt
$$D_{i_1}^{p_1} \circ D_{i_2}^{p_2} \circ \dots \circ D_{i_r}^{p_r} f$$ eine partielle Ableitung von f der Ordnung p.

6.13. Bsp: Für $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ betrachte $f\binom{x}{y} = xe^y + yx^2$.
Dann: $D_1 f\binom{x}{y} = e^y + 2xy$, $D_2 f\binom{x}{y} = xe^y + x^2$,
$D_2 D_1 f\binom{x}{y} = e^y + 2x$, $D_1 D_2 f\binom{x}{y} = e^y + 2x$.
Hier gilt $D_2 D_1 f\binom{x}{y} = D_1 D_2 f\binom{x}{y}$. Ist das immer so? Antwort:

6.14. Satz von Schwarz: Geg.: $f: U \to \mathbb{R}$, $a \in U \subset \mathbb{R}^n$.
Vor.: $D_k f$, $D_\ell f$ ex. auf U, $D_\ell D_k f$ ex. auf U, $D_\ell D_k f$ stetig in a.
Beh.: $D_k D_\ell f(a)$ ex. und $D_k D_\ell f(a) = D_\ell D_k f(a)$.
Bew.: Sei OE $n=2$, $k=1$, $\ell=2$, $a=0$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, $\varepsilon > 0$ so dass $\mathcal{U}_0^\varepsilon \subseteq U$.
Wähle $h, k \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h|, |k| < \varepsilon$.
Doppelter Differenzenquotient:
$$F(h,k) := \frac{1}{hk}\left(f\binom{h}{k} - f\binom{h}{0} - \left(f\binom{0}{k} - f\binom{0}{0}\right)\right) \in \mathbb{R}^m.$$
Für k fest setze $g(t) := f\binom{t}{k} - f\binom{t}{0}$ mit $|t| < \varepsilon$.
Dann: $hkF(h,k) = g(h) - g(0) = g'(\tau h)\, h$ mit $0 < \tau < 1$ geeignet laut MWS 6.4
$$= \left(D_1 f\binom{\tau h}{k} - D_1 f\binom{\tau h}{0}\right) h = D_2 D_1 f\binom{\tau h}{\sigma k} hk$$
mit $0 < \sigma < 1$ geeignet laut MWS 6.4
$$\Rightarrow F(h,k) = D_2 D_1 f\binom{\tau h}{\sigma k} \xrightarrow{h,k \to 0} D_2 D_1 f(0),$$ da $D_2 D_1 f$ stetig in 0.
Somit ex. $\lim\limits_{(h,k)\to 0} F(h,k)$, sowie
$$\lim_{(h,k)\to 0} F(h,k) = D_2 D_1 f(0).$$
Bei umgekehrter Reihenfolge betrachtet erhält man, dass
$D_1 D_2 f(0) = \lim\limits_{(h,k)\to 0} F(h,k)$. Es folgt $D_2 D_1 f(0) = D_1 D_2 f(0)$. □

6.15. **Bem.:** Wie im Satz 6.7 (Kriterium für totale Diff'barkeit) und im Satz von Schwarz 6.14 zu sehen ist, ist die Eigenschaft, dass die partiellen Ableitungen immer noch stetig sind, essentiell.

6.16. **Def.:** • Sei $p \in \mathbb{N}$. (auch $\mathbb{R}^m$ möglich)
$f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, heißt p-mal stetig (partiell) diff'bar, falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung p existieren und stetig sind.

• Eine 1-mal stetig partiell diff'bare Fkt. heißt auch stetig (partiell) diff'bar, vgl. 6.8.

• Für $U \subset \mathbb{R}^n$ setze $\mathcal{C}^p(U,\mathbb{R}) = \mathcal{C}^p(U) := \{f: U \to \mathbb{R},\ f \text{ p-mal stetig (partiell) db}\}$.
Weiter sei $\mathcal{C}^0(U) := \{f: U \to \mathbb{R};\ f \text{ stetig}\}$.
Ferner setze $\mathcal{C}^\infty(U) := \bigcap_{p \geq 0} \mathcal{C}^p(U)$, die Menge der beliebig oft („∞ oft") stetig diff'baren Funktionen.

Dies sind trivialerweise $\mathbb{R}$-VRe, und überdies Standardbeispiele für nicht endlichdimensionale $\mathbb{R}$-VRe.

6.17. Aus dem Satz 6.7 folgt unmittelbar:
Kor.: Jede stetig diff'bare Fkt. (d.h. 1-mal stetig partiell diff'bare Fkt.) ist (total) diff'bar.

6.18. Aus dem Satz von Schwarz 6.14 folgt unmittelbar:
Kor.: **Vor.:** f in U p-mal stetig (partiell) diff'bar.
Beh.: Das Ergebnis einer p-maligen partiellen Ableitung ist von der Reihenfolge unabhängig.

6.19. **Bsp.:** Die zweiten (partiellen) Ableitungen von $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=v} \mapsto 3x^2 - \sin(y) + x^3\cos(z)$
sind $D_1 D_3 f(v) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2 - \sin(y) + x^3\cos(z)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x^3\sin(z)\right) = -3x^2\sin(z)$
bzw. $D_3 D_1 f(v) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 - \sin(y) + x^3\cos(z)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(6x + 3x^2\cos(z)\right) = -3x^2\sin(z)$,
sowie $D_2 D_3 f(v) = 0 = D_3 D_2 f(v)$ bzw. $D_1 D_2 f(v) = 0 = D_2 D_1 f(v)$,
ferner $D_1^2 f(v) = \frac{\partial}{\partial x}(6x) = 6$, $D_2^2 f(v) = \frac{\partial}{\partial y}(-\cos(y)) = \sin(y)$,
$D_3^2 f(v) = \frac{\partial}{\partial z}(-x^3\sin(z)) = -x^3\cos(z)$.
Nach 6.7 ist f diff'bar, da die partiellen Ableitungen $D_1 f, D_2 f, D_3 f$ stetig sind.