Vorlesung Analysis II

Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

SoSe '25 hhu
K. Halupczok

an8: Lokale Umkehrbarkeit

Stichworte: Kontraktion, Banachscher Fixpunktsatz, Lokale Umkehrbarkeit

Literatur: [Forster, Ende von Kap. 8]

8.1. Einleitung: Mit dem Banachschen Fixpunktsatz zeigen wir den Satz über die lokale Umkehrbarkeit als Verallgemeinerung des Satzes von der Ableitung von Umkehrfktn.

8.2. Motivation: Sei $a \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$,
d.h. $f_j \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.
Haben: $f' : \mathcal{U} \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n \times n}$ ist stetig
(d.h. jedes f_i' bzgl. Norm $\|\cdot\|_\infty$ und dazu äquivalente Normen).

Als Kriterium für Invertierbarkeit ist bekannt:
$A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertierbar $\iff \det A \neq 0$.
Jetzt: $A = f'(a)$ invertierbar $\overset{!}{\Rightarrow}$ f nahe a invertierbar,
d.h. $\exists U \in \mathcal{U}_a : f\restriction_U$ invertierbar.

8.3. Def.: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$.
Dann: a heißt Fixpunkt von f, falls $f(a) = a$ ist.

8.4. Bsp.: • Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + c$ für $c \in \mathbb{R}^n$ fest.
Für $c = 0$ sind alle x fix, für $c \neq 0$ ist kein x fix.
• Ist f eine Drehung um 0 als Drehzentrum, so ist 0 Fixpunkt und alle x fix, wenn der Drehwinkel Vielfaches von 2π ist.

8.5. Def.: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann heißt f kontrahierend (oder Kontraktion) mit Kontraktionsfaktor $p \in [0, 1[$, falls $\forall a, b \in \mathbb{R}^n : \|f(a) - f(b)\| \leq p \|a - b\|$.
(Wobei $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ sei.) Beachte $p < 1$!

Bem.: Jede Kontraktion ist stetig (klar per Def.).

8.6. Banachscher Fixpunktsatz: Vor.: $f: U \to U$ kontrahierend mit Kontraktionsfaktor p, wo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ~~und beschränkt~~ sei. (Vgl. später Teil 2 dieser Vorlesung)

Beh.: a) $\exists!$ Fixpunkt a von f.

b) Setze $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig, und $x_{k+1} := f(x_k)$ für alle $k \geq 0$.

Dann: $\|x_k - a\| \leq \frac{p^k}{1-p}\|x_1 - x_0\|$, d.h. insb. $\lim_{k\to\infty} x_k = a$.

Bew.: a): Eindeutigkeit: Ann.: u, v seien Fixpunkte, $u \neq v$

Dann: $0 \neq \|u-v\| = \|f(u) - f(v)\| \leq p\|u-v\| < \|u-v\|$, ↯. Also folgt $u = v$.

Existenz: 1. Abschätzung: $\|x_{k+1} - x_k\| = \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq p\|x_k - x_{k-1}\|$
$\leq \ldots \leq p^k \|x_1 - x_0\|$.

2. Abschätzung: $\|x_{k+l} - x_k\| \leq (p^{k+l-1} + p^{k+l-2} + \ldots + p^k)\|x_1 - x_0\|$ (mit $l \geq 1$)
$= p^k(p^{l-1} + \ldots + 1)\|x_1 - x_0\| \underset{\text{geom.}\Sigma,\ |p|<1}{\leq} \frac{p^k}{1-p}\|x_1 - x_0\|$. ⊛

Es folgt: (x_k) ist eine Cauchyfolge,

in ~~beschränkten~~ ~~und~~ abg. Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist jede Cauchyfolge kgt. ($\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, vgl. An 5.21)

also ex. $\lim_{k\to\infty} x_k =: a \in U$ (Vgl. Ü Bl. 2, A1.2.: Kgz. in $\mathbb{R}^n$ ✓ d.h. jeder GWeiner Folge von U liegt in U
Dann: Kgz. in U, da ~~U beschr. (in $\|\cdot\|_\infty$) und~~ abgeschlossen.)

Dieser GW ist Fixpunkt, denn $f(a) \overset{k\to\infty}{\underset{f \text{ stetig}}{\longleftarrow}} f(x_k) = x_{k+1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$,

und aufgrund der Eindeutigkeit des GWes folgt $f(a) = a$.

b): Obige Abschätzung ⊛ für $l \to \infty$. □

8.7. Bsp.: Newton-Verfahren zur numerischen Nullstellenbestimmung:

Für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff'bar und $\forall x: f'(x) \neq 0$

setze $g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ein Fixpunkt a von g ist dann genau eine Nst. von f wegen $g(a) = a \Leftrightarrow a = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \Leftrightarrow f(a) = 0$.

Die Fixpunkte von g bzw. Nst. von f erhält man nach 8.6. b) mit der Rekursion $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{k+1} := g(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, falls g kontrahierend ist. Ist a eine Nst. von f in einem IV I, $f \in \mathcal{C}^2(I)$,

so ist laut Taylorformel (1. Ordnung): $0 = f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2$, ξ zw. a und x

$\Leftrightarrow \underbrace{x - \frac{f(x)}{f'(x)}}_{g(x)} - a = \frac{f''(\xi)}{2f'(x)}(x-a)^2$, mit $M_2 = \sup_{x\in I}|f''(x)|$, $m_1 = \inf_{x \in I}|f'(x)|$

folgt $|g(x) - a| \leq \frac{M_2}{2m_1}|x-a|^2$ für alle $x \in I$,

was unter bestimmten Voraussetzungen zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft von g führt.

8.8. Satz über die lokale Umkehrbarkeit: (Verallg. von Satz An 12.2, Ableitung von Umkehrfktn.)

Vor.: $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, $A := f'(a) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei invertierbar, $b := f(a)$.

Beh.: (1) $\exists U \subset \mathbb{R}^n \; \exists V \subset \mathbb{R}^n$: $\underset{a}{\underset{\cup}{U}} \xrightarrow{f} \underset{b}{\underset{\cup}{V}}$ bijektiv,

(2) $f^{-1}_{\restriction U}$ ist stetig diff'bar (in V),

(3) $f'(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist invertierbar für alle $x \in U$,

(4) $\forall y \in V$: $\left(f^{-1}_{\restriction U}\right)'(y) = \left(f'\left(f^{-1}_{\restriction U}(y)\right)\right)^{-1}$. ⌜Vgl. $(f^{-1})'(b) = (f'(f^{-1}(b)))^{-1}$ in An 12.2⌟

Bew.: • Sei OE $a = b = 0$, durch Betrachtung von $f(x-a)$ bzw. $f(x)-f(a)$.
Ferner sei OE $A = I_n$, die Einheitsmatrix $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
durch Betrachtung von $x \mapsto A^{-1} \circ (f(x+a) - b)$
mit der Ableitung $A^{-1} \circ (f(x+a) - b)'(a) \underset{a=b=0}{=} A^{-1} \circ f'(0) = A^{-1} \circ A = I_n$.

• Ann.: (1) und (2) gelte. Für $x \in U$ gilt dann: $f^{-1}_{\restriction U} f(x) \overset{(1)}{=} x$, was laut Kettenregel diff'bar ist mit der Ableitung: $(f^{-1}_{\restriction U})'(f(x)) \cdot f'(x) = I_n$,
denn $f^{-1}_{\restriction U}$ ist diff'bar laut (2). Also ist $f'(x)$ invertierbar (also (3)),
nämlich mit $(f'(x))^{-1} = (f^{-1}_{\restriction U})'(f(x))$. Setze nun $y = f_{\restriction U}(x) = f(x)$,
also $x = f^{-1}_{\restriction U}(y)$,
es folgt $\left(f'(f^{-1}_{\restriction U}(y))\right)^{-1} = (f^{-1}_{\restriction U})'(y)$, das ist Formel (4).

• Noch z.z.: (1) und (2). Dazu betr. die Norm $\|\cdot\|_\infty$.
Nach Vor. ist f' stetig (d.h. die f_i' stetig), sowie $f'(0) = I_n$.
Daher $\exists \delta > 0 \; \forall x \in \overline{\mathcal{U}_0^{2\delta}}$: $\max_i \| f_i'(x)^T - pr_i(I_n)\|_\infty \leq \frac{1}{2n} =: M$,
dabei sei OE $\overline{\mathcal{U}_0^{2\delta}} \subseteq D$. (Def. $\overline{\mathcal{U}_0^{2\delta}} := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_\infty \leq 2\delta\}$)
Setze $V := \mathcal{U}_0^{\delta}$, wähle $y \in V$ fest und setze als Hilfsfunktion
suche Urbild von $y \in V$ $\quad h(x) := x - f(x) + y$ für $x \in D$.

Dann ist $h'(x) = I_n - f'(x)$, sowie
$\max_i \|h_i'(x)^T\|_\infty = \max_i \| pr_i(I_n) - f_i'(x)^T\|_\infty \le \frac{1}{2n} = M$,
es folgt mit Folgerung 6.6 des MWS,
dass $\|h(x_1) - h(x_2)\|_\infty \le n M \cdot \|x_1 - x_2\|_\infty = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$ für alle $x_1, x_2 \in \overline{\mathcal{U}_0^{2\delta}}$,
d.h. h ist kontrahierend. Nun ist $\overline{\mathcal{U}_0^{2\delta}}$ beschränkt und abgeschlossen,
daher wende den Banachschen Fixpunktsatz 8.6. für h an. Dies heißt:
$\exists !\, x \in \overline{\mathcal{U}_0^{2\delta}}$ mit $h(x) = x \Leftrightarrow x - f(x) + y = x \Leftrightarrow f(x) = y = h(0)$.
Problem: Liegt x auf dem Rand von $\overline{\mathcal{U}_0^{2\delta}}$? Nein:
⌈Haben die Abschätzung $\|h(\tilde{x})\|_\infty = \|\overbrace{(\tilde{x} - f(\tilde{x}) + y)}^{h(\tilde{x})} - \underbrace{h(0)}_{=y} + \underbrace{h(0)}_{=y}\|_\infty$
$\le \frac{1}{2}\underbrace{\|\tilde{x} - 0\|_\infty}_{\le 2\delta} + \underbrace{\|y\|_\infty}_{<\delta} < 2\delta$ für alle $\tilde{x} \in \overline{\mathcal{U}_0^{2\delta}}$,

Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen sind offen

mit $h(x) = x$ folgt $\|x\|_\infty \le \frac{1}{2}\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ bzw. $\|x\|_\infty \le 2\overbrace{\|y\|_\infty}^{<2\delta}$ ⊛, d.h. $x \in \mathcal{U}_0^{2\delta}$.⌋
Setze $U := f^{-1}(\mathcal{U}_0^{\delta}) \cap \mathcal{U}_0^{2\delta} \subset \mathbb{R}^n$, $\psi := f_{|U}$, $U \xrightarrow{\psi} V$ ist also
injektiv und surjektiv, also bijektiv $\leadsto$ (1) gilt. Setze $\varphi := \psi^{-1} = f_{|U}^{-1}$.
Aus ⊛ folgt: φ ist stetig in 0. ⌈$\|\varphi(y) - \varphi(0)\|_\infty \le 2\|y - 0\|_\infty$⌋

- Beh.: φ ist in 0 diff'bar und $\varphi'(0) = I_m$, d.h. (2) gilt.
  Bew.: $y = f(x) = \overset{f(0)}{0} + x + \varepsilon(x) \cdot \|x\|_\infty$, ε ist in 0 stetig,
  $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ da $f'(0) = I_m$.
  $\Rightarrow \varphi(y) = x = y - \varepsilon(\varphi(y)) \cdot \frac{\|\varphi(y)\|_\infty \cdot \|y\|_\infty}{\|y\|_\infty}$.

  Aus $y \to 0$ folgt $\varphi(y) \to 0$, da φ stetig in 0,
  ebenso gilt $\varepsilon(\varphi(y)) \xrightarrow{y \to 0} 0$. Also: $\varepsilon(\varphi(y)) \cdot \frac{\|\varphi(y)\|_\infty}{\|y\|_\infty} \xrightarrow{y \to 0} 0$.
  Daher ist φ in 0 diff'bar und $\varphi'(0) = I_m$. ✓
- Ferner ist $\varphi' = (f_{|U}^{-1})'$ stetig als Komposition stetiger Abbildungen nach (4).
  (Bemerke, dass im obigen Beweis von (4) nicht die Stetigkeit von φ' benutzt wird.) □

8.9. Zusatz: Es gilt auch: $f_{|U} \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi = (f_{|U})^{-1} \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$.
8.10. Bem.: Eine Abb. $f: U \to V$ mit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Diffeomorphismus, falls f bij. und f, f^{-1} stetig db.