Vorlesung Analysis II — SoSe '25 hhu

Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ — K. Halupczok

an9: Extrema mit Nebenbedingungen, implizite Funktionen

Stichworte: Extrema mit NBen, Lagrange-Multiplikatoren, impliziter Funktionensatz, UMF

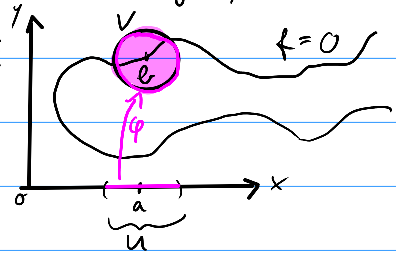
Literatur: [Hoff], Kapitel 9.8, [Forster], Kapitel 8, 9

9.1. Einleitung: Als Anwendung des Satzes von der lokalen Umkehrbarkeit zeigen wir den impliziten Funktionensatz und untersuchen Extrema mit Nebenbedingungen.

9.2. Motivation: Sei $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$. Diskutieren im Fall $n=2$:

2. Ziel: Wollen die Glg. $f(x,y)=0$ "nach y auflösen",
also eine Fkt. φ finden mit $f(x,y)=0 \iff y=\varphi(x)$. Wir sagen dann, die Glg. $f(x,y)=0$ definiert implizit eine Funktion φ.
Wie und unter welcher Vor. das geht, beschreibt der Satz über implizite Funktionen. Wir erwarten, dass dies nur "lokal" geht, also auf Umgebungen einer Stelle a und einem Wert b mit $f(a,b)=0$.

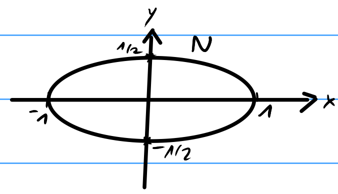
Skizze:



Konkretes Bsp.: Glg. $x^2+4y^2=1 \to f(x,y)=x^2+4y^2-1$,
und $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$.

1. Ziel: Bsp. $n=2$:
In Anwendungen der Extremwertbestimmung wird oft nach Extrema von Funktionen $g(x,y)$ auf einer Nullstellenmenge $N := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ f(x,y)=0\}$ gefragt, d.h. unter der Bedingung $f(x,y)=0$. Gegeben ist dann eine "Nebenbedingung".

Konkretes Bsp.: $\tilde{f}(x,y)=\frac{xy}{1+x^4+y^4}$ (richtig: g), ist stetig, nimmt Extrema auf $N=\{(x,y);\ f(x,y)=0\}$ an. Ist $\binom{x_0}{y_0}\in N$ so eine Stelle, und ist $\binom{0}{1}\neq\binom{x_0}{y_0}\neq\binom{1}{0}$, dann gilt nahe $\binom{x_0}{y_0}$: $D_2 f(x,y)\neq 0$.



⊛ Bsp. in 9.20 unten mit $g(x,y)=\sqrt{xy}$

zu 1. Ziel:

9.3. Allgemeine Situation: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $2 \leq l \leq n$, $(\overset{g}{f_1}, \overbrace{f_2, \dots, f_l}^{NBen}) = f \in C^1(D, \mathbb{R}^l)$.
Setze $N := \bigcap_{i=2}^{l} f_i^{-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^n \cap D$.
Sprechweise: f_1 hat ein lokales Extremum in $a \in N$ mit Nebenbedingung N, falls $f_{1|N}$ in a ein lokales Extremum hat.

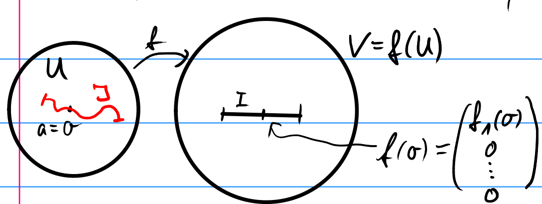
9.4. Satz: Geg. die Situation 9.3, Vor.: $f_{1|N}$ hat in $a \in N$ ein lokales Extremum.
Beh.:
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_l & \cdots & D_n f_l \end{pmatrix}(a) < l.$$
"Lagrangesche Multiplikatorenregel"

9.5. Bem.: • Im Fall $l = n$ ist die Beh. äquivalent zu $\det\begin{pmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n & \cdots & D_n f_n \end{pmatrix}(a) = 0$.
• Es gilt: Beh. $\operatorname{rg}(\dots) < l$
$\Leftrightarrow f_1'(a), \dots, f_l'(a)$ sind lin. abh.
$\Leftrightarrow \exists (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_l)^T \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\} : D_j\left(\sum_{i=1}^{l} \tilde{\lambda}_i f_i\right)(a) = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.
OE sei $\lambda_1 = 1$ (sonst umnumerieren und normieren).
Also $\exists (\lambda_2, \dots, \lambda_l)^T \in \mathbb{R}^{l-1}$ mit $D_j f_1(a) = \sum_{i=2}^{l} \lambda_i D_j f_i(a)$, alle $j \in \{1, \dots, n\}$.
$\Rightarrow \operatorname{grad} f_1(a) = \sum_{i=2}^{l} \lambda_i \operatorname{grad} f_i(a)$. ⌜OE ohne Minus vor den λ_i …⌟

⌜Bsp. für $l = 2$: $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \operatorname{grad} f_1(a) = \lambda \operatorname{grad} f_2(a)$, für $f_2'(a) \neq 0$.⌟

9.6. Def.: Man nennt die $\lambda_2, \dots, \lambda_l$ Lagrangemultiplikatoren.

9.7. Bew.: Sei OE $a = 0$. • Ferner betr. zunächst den Fall $l = n$.
Angenommen, es wäre sonst $\operatorname{rg} A = n$,
wo $A = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n & \cdots & D_n f_n \end{pmatrix}(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Dann ist A eine invertierbare Matrix.
Der Satz über lokale Umkehrbarkeit 8.8 liefert dann:
$\exists U \subset \mathbb{R}^n \; \exists V \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in U$, $f(0) \in V$, $U \xrightarrow{f|_U} V$ invertierbar und bijektiv.



Betr. $I := \begin{pmatrix} [f_1(0) - \varepsilon, f_1(0) + \varepsilon] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ für $\varepsilon > 0$ klein so, dass I ganz im Bild V liegt.
Dann ist $J := f^{-1}(I) \subseteq N$, aber $f_{1|N}$ hat in 0 ein lokales Extremum $\Rightarrow$ ↯.

- Im allgemeinen Fall: Betr. $g:\mathbb{R}^\ell\to\mathbb{R}^\ell$, $g(y):=f\binom{y}{0}$, wo $\binom{y}{0}\in\mathbb{R}^m$, $y\in\mathbb{R}^\ell$ für hinreichend kleine $\|y\|$ so, dass $\binom{y}{0}\in D$.

  Es ist $N\supseteq\bigcap_{i=2}^{\ell} g_i^{-1}(0)$, und g_1 hat in 0 ein lokales Extremum unter NB N.

  Nach Spezialfall $m=\ell$ ist dann $\operatorname{rg}\begin{pmatrix}D_1 f_1 & \cdots & D_\ell f_1\\ \vdots & & \vdots\\ D_1 f_\ell & \cdots & D_\ell f_\ell\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}D_1 g_1 & \cdots & D_\ell g_1\\ \vdots & & \vdots\\ D_1 g_\ell & \cdots & D_\ell g_\ell\end{pmatrix}<\ell$.

  Betr. $g_{(r)}:=\mathbb{R}^\ell\to\mathbb{R}^\ell$, $g_{(r)}(y):=f\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_{\ell-1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ y_\ell\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ ← an Stelle $\ell+r\le m$, für $r\in\mathbb{N}_0$.

  Es ist $N\supseteq\bigcap_{i=2}^{\ell} g_{(r)i}^{-1}(0)$, und g_1 hat in 0 ein lokales Extremum unter NB N.

  Nach Spezialfall ist dann $\operatorname{rg}\begin{pmatrix}D_1 f_1 & \cdots & D_{\ell-1} f_1 & D_{\ell+r} f_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ D_1 f_\ell & \cdots & D_{\ell-1} f_\ell & D_{\ell+r} f_\ell\end{pmatrix}<\ell$.

  Sei $h_i:=\begin{pmatrix}D_i f_1\\ \vdots\\ D_i f_\ell\end{pmatrix}$, $1\le i\le m$.

  Dann ist $\operatorname{rg}(h_1,\dots,h_{\ell-1},h_{\ell+r})<\ell$ für alle $r\in\{0,\dots,m-\ell\}$.

  Daher ist $\operatorname{rg}(h_1,\dots,h_m)<\ell$, die Beh. $\square$

9.8. Bsp.: $\ell=2$, $f_2(x)=\langle x,x\rangle-1$, $f_1(x)=\langle Qx,x\rangle$, insb. $f_1,f_2:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, mit $Q\in\mathbb{R}^{m\times m}$ symmetrisch, d.h. $Q^T=Q$.

Sei $N:=f_2^{-1}(0)=S^{m-1}=\{x\in\mathbb{R}^m;\ \|x\|_2^2=1\}$ die Einheitssphäre.

Es gilt: $f_1(a+h)=\langle Q(a+h),a+h\rangle$ $(a,h\in\mathbb{R}^m)$

$$=\langle Qa,a\rangle+\underbrace{\langle Qh,a\rangle}_{=\langle h,Q^Ta\rangle=\langle h,Qa\rangle=\langle Qa,h\rangle}+\langle Qa,h\rangle+\langle Qh,h\rangle$$

$$=f_1(a)+\underbrace{2\langle Qa,h\rangle}_{\to f_1'(a)=2Qa}+\underbrace{\langle Qh,h\rangle}_{=o(\|h\|)}$$

Also sind $f_1,f_2\in\mathcal{C}^1$. Setze $M:=\max f_1|_{S^{m-1}}$. (haben $N=S^{m-1}$).

Eine stetige Fktn. auf beschr. &abg. Menge nimmt ein Maximum an. → Ex. von M

Es folgt: $\exists a: f_1(a)=M$, mit $a\neq 0$ (da $a\in S^{m-1}$).

Es gilt: $\operatorname{grad} f_2(a)\neq 0$ (haben ja $f_2'(a)=2a^T\neq 0$).

Also ex. $\lambda\in\mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f_1(a)=\lambda\operatorname{grad} f_2(a)$

$$\iff 2Qa=2\lambda a\iff Qa=\lambda a,$$

d.h. a ist Eigenvektor mit Eigenwert λ von Q.

Für $Qa = \lambda a$ gilt $f_1(a) = \langle \lambda a, a\rangle = \lambda \langle a, a\rangle = \lambda$ mit $a \in N = S^{m-1}$
und $\lambda = f_1(a) = M \geq f_1(x)$ für alle $x \in S^{m-1}$.

Also gilt: M ist maximaler Eigenwert von Q.
⌈Ist $Qx = \mu x$, folgt $f_1(x) = \mu$ für $x \in S^{m-1}$.⌋

9.9. Konkretes **Bsp.:** $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x^2+y^2-1$, $\operatorname{grad} f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (2x, 2y)^T$.

$$f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}}_{=Q}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}x+2y\\2x+3y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle = x^2+2xy+2xy+3y^2 = x^2+4xy+3y^2,$$
$$\operatorname{grad} f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (2x+4y, 4x+6y)^T.$$

EWe von Q: $\chi_Q(T) \overset{!}{=} 0 \iff \det\begin{pmatrix}1-T & 2\\ 2 & 3-T\end{pmatrix} = 0$
$\iff (1-T)(3-T) - 4 = 0 \iff T^2 - 4T - 1 = 0$
$\iff T_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$.

Der größte EW von Q (und somit das Maximum von f_1 auf der Einheitskreislinie) ist $2+\sqrt{5} =: \lambda$.

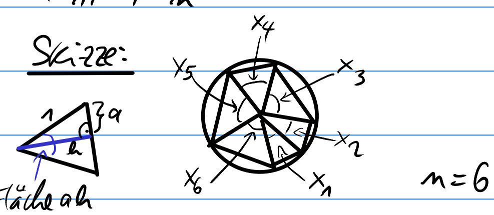
$\left[\frac{2}{1-\lambda} = \frac{2}{-1-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

Bestimmung von $a = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ als zugeh. EV: $(Q - I_2\lambda)a = \begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)x + 2y = 0 \to x = \frac{-2}{1-\lambda}y$,
mit $a \in S^1$ muss $x^2+y^2 = 1$ gelten, also $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{y^2} \iff \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}(5-\sqrt{5}) \iff y^2 = \frac{2(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$, daraus $x \ldots$

9.10. **Bsp.:** Sei $m > 2$, man bestimme das Maximum von $f(x) = \sin x_1 + \ldots + \sin x_m$ unter der NB $g(x) := x_1 + \ldots + x_m = 2\pi$, wobei $f : [0,\pi]^m \to \mathbb{R}$.

Anschaulich: $f(x)$ ist der doppelte Flächeninhalt des im Einheitskreis einbeschriebenen m-Ecks mit den Zentriwinkeln $x_1, \ldots, x_m$ unter der NB $x_1 + \ldots + x_m = 2\pi$.

Skizze:



Fläche ah
mit $\sin\frac{x}{2} = a$, $\cos\frac{x}{2} = h$
$\Rightarrow 2ah = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \sin(x)$

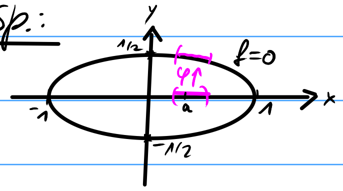
Vorgehen: Die Menge $\Delta := \{x \in [0,\pi]^m ;\ g(x) = 2\pi\}$ ist
beschränkt und abgeschlossen und
weil f stetig ist, nimmt f dort ihr Maximum an
(Klar: Max. nicht auf den Randpunkten).

<u>Lagrange-Ansatz</u>: nur Stellen $x=(x_1,\dots,x_n)$ kommen für dieses Extremum in Frage, für die es einen Multiplikator $\lambda\in\mathbb{R}$ gibt mit
$$0=\operatorname{grad} f(x)+\lambda \operatorname{grad} g(x)=(\cos x_1,\dots,\cos x_n)+\lambda\cdot(1,\dots,1),$$
was nur für $\cos x_1=\dots=\cos x_n$ geht. Mit $0\le x_j\le\pi$ folgt $x_1=\dots=x_n$, und aus der NB $g(x)=2\pi$ folgt $x_j=\frac{2\pi}{n}$ für $1\le j\le n$.
Also ist der Flächeninhalt des einem Kreis einbeschriebenen n-Ecks genau für das regelmäßige n-Eck maximal.

Zu 2. Ziel:

9.11. <u>Motivation</u>: $\ell,k\in\mathbb{N}$, $n=\ell+k$, $D\subset\mathbb{R}^n$, $f\in\mathcal{C}^1(D,\mathbb{R}^k)$.

<u>Bsp.</u>:



Umkehrung? Ging für $\frac{\partial f}{\partial y}(a)\neq 0$ bei $f:\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$: dann findet sich eine Umgebung von a, in der φ eine Umkehrfunktion besitzt.

9.12. <u>Allgemeine Situation</u>: Stelle $w=(a,b)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^k=\mathbb{R}^{\ell+k}$.
Dann: $f'(w)=\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(w)}_{\in\mathbb{R}^{k\times\ell}},\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(w)}_{\in\mathbb{R}^{k\times k}}\Big)\in\mathbb{R}^{k\times(\ell+k)}$

9.13. <u>Satz über implizite Funktionen</u>: $\ell,k\in\mathbb{N}$, $D\subset\mathbb{R}^{\ell+k}$, $f\in\mathcal{C}^1(D,\mathbb{R}^k)$

<u>Vor.</u>: $w\in D$, $f(w)=0$, $\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(w)\right)\neq 0$ $(w=(a,b)\in\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^k)$.

<u>Beh.</u>: $\exists U,V$, $w\in U\times V\subset\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^k$ mit:
$\varphi: U\to V$, $x\mapsto y\in V$ mit $f(x,y)=0$ ist eine Abbildung,
und zwar $\varphi\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^k)$.
Die Ableitung von φ ist $\varphi'(x)=-\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{\varphi(x)}}_{\in\mathbb{R}^{k\times k}}\Big)^{-1}\cdot\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{\varphi(x)}}_{\in\mathbb{R}^{k\times\ell}}\in\mathbb{R}^{k\times\ell}$.

1. <u>Bem.</u>: $f\in\mathcal{C}^r \underset{\text{Vollst. Ind.}}{\Longrightarrow} \varphi\in\mathcal{C}^r$.

2. <u>Bem.</u>: Bemerkenswert ist an diesem Satz, dass u.U. φ nur schwierig berechnet werden kann, sehr wohl aber die Ableitung $\varphi'(x)$ nach der Formel (ohne die explizite Fkt. φ ableiten zu müssen).

9.14. **Bew.:** • Falls φ existiert und diff'bar, so gilt:

$$0 = f(x, \varphi(x)) \Rightarrow (f(x,\varphi(x)))' = 0$$

$$\overset{\text{K.R.}}{\Rightarrow} \frac{\partial}{\partial x} f(x,\varphi(x)) \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(x,\varphi(x))}_{\text{invbar, falls } x \text{ nahe } a,\ \text{d.h. falls } (x,\varphi(x)) \text{ nahe } (a,b) = w:} \cdot \varphi'(x) = 0$$

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(w) \neq 0 \Rightarrow \det \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) \neq 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^1.$$

• **Betr.** $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k$, $F \in \mathcal{C}^1$, $(x,y) \mapsto (x, f(x,y))$.

Es gilt

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \overbrace{I_\ell}^{\in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}} & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\in \mathbb{R}^{k\times k}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\ell+k)\times(\ell+k)}, \quad \det F' = \det \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \text{ nahe } w.$$

Der Satz über lokale Umkehrbarkeit 8.8 liefert nun:

$\exists W,\ w \in W \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k$:

$$\underset{\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^k}{(x,y)} \longmapsto \underset{\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^k}{(x, f(x,y))} \longmapsto \underset{\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^k}{(x, \underbrace{g(x, f(x,y))}_{=y})}$$

$$W \xrightarrow[\text{bij.}]{F} F(W) \xrightarrow{G = F^{-1}} W \xrightarrow{\quad F \quad} F(W)$$

$$(u,v) \longmapsto (u, \underbrace{g(u,v)}_{\in \mathcal{C}^1}) \longmapsto (u, \underbrace{f(u, g(u,v))}_{=v}),$$

d.h. (1) $g(x, f(x,y)) = y$

(2) $f(x, g(x,y)) = y$.

Wähle nun $U \subset \mathbb{R}^\ell$ mit $U \times \{0\} \subseteq F(W)$, mit $0 \in \mathbb{R}^k$.

(U existiert, da $f(w) = 0$, also 0 als 2. Komponente in $F(W)$ vorkommt.)

Für $x \in U$ setze $\varphi(x) := g(x, 0)$.

Beh.: φ löst $f(x,y) = 0$.

Denn: $f(x, \varphi(x)) = f(x, g(x,0)) \overset{(2)}{=} 0$.

Ferner: φ ist eindeutig: $x \in U$, $f(x,y) = 0$,

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} y = g(x, f(x,y)) = g(x, 0) = \varphi(x). \qquad \square$$

9.15. **Bsp.:** Betr. $f(x,y)=x^2+y^2-1$. Für $y>0$ ist $y=\sqrt{1-x^2}$ die Fkt. $y=\varphi(x)$ "lokal", die durch $f(x,y)=0$ "implizit" gegeben ist.
Laut Satz ist ihre Ableitung gleich $\varphi'(x)=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (wo $y>0$ ist),
wir erhalten das Ergebnis direkt durch partielles Ableiten von f,
ohne die explizite Funktion $\varphi(x)$ ableiten zu müssen. ⌜Was hier ginge.⌟

9.16. **Bsp.:** Ist die Glg. $x^y=y^x$ in der Nähe von $a=(e,e)$ bzw. $\tilde{a}=(2,4)$ nach einer der beiden Variablen auflösbar?
Setze $f:\mathbb{R}^2_{>0}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^y-y^x$, f ist für $x,y>0$ bel. oft diff'bar,
$f(e,e)=f(2,4)=0$. Die partiellen Ableitungen sind
$$D_1 f(x,y)=y\,x^{y-1}-y^x\ln(y),\qquad D_2 f(x,y)=x^y\ln(x)-x\,y^{x-1}.$$
- In $w=(2,4)$ sind diese beiden partiellen Abl. $\neq 0$,
  also ist die Glg. dort lokal nach x oder y auflösbar
  (nur explizit nicht, aber eben implizit!).
  Es gilt $\underbrace{\varphi'(2)}_{y'(2)}=-\frac{D_1 f(2,4)}{D_2 f(2,4)}=-\frac{2^5-2^5\ln(2)}{2^4\ln(2)-8}$ für die Ableitung der Auflösung nach y an der Stelle $w=(2,4)$.
- In (e,e) gilt $f'(e,e)=\operatorname{grad} f(e,e)=(0,0)$, der implizite Funktionensatz ist deswegen dort nicht anwendbar (und f dort nicht auflösbar nach x oder y).

9.17. **Bem.:** Gegeben sei die Situation wie in 9.3, nämlich:
Sei $D\subset\mathbb{R}^n$, $2\le \ell\le n$, $(f_1,\dots,f_\ell)=f\in\mathcal{C}^1(D,\mathbb{R}^\ell)$. Im Gegensatz zu 9.4 sei jetzt
aber $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_n f_1\\ \vdots & & \vdots\\ D_1 f_\ell & \cdots & D_n f_\ell\end{pmatrix}(a)=\ell$. Wegen 9.4 kann $f_1|_N$ kein Extremum in $a\in N$ haben, analog auch nicht für $f_2,\dots,f_\ell$.
Dann liegt eine besondere Situation vor, die in der mehrdimensionalen Analysis die folgende Bezeichnung hat.

9.18. **Def.:** $M\subseteq\mathbb{R}^n$ heißt $(n-\ell)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ("UMF"), falls: $\forall a\in M\ \exists U\ni a,\ U\subset\mathbb{R}^n\ \exists f\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^\ell)$, $f=(f_1,\dots,f_\ell)$:
1) $M\cap U=U\cap f^{-1}(0)\ (=f^{-1}(0))$, 2) $\operatorname{rg} Df(a)=\ell$.

9.19. **Bem.:** Jede $(n-\ell)$-dim. UMF ist diffeomorph zu $\underbrace{\{x\in\mathbb{R}^n;\ x_{n-\ell+1}=\dots=x_n=0\}}_{(n-\ell)\text{-dimensionale Ebene im }\mathbb{R}^n}$ der Dimension $n-\ell$.
[Forster, Kap. 9, Satz 2]

9.20. <u>Bsp.</u>: Gesucht sei Extremum von $g(x,y)=\sqrt{xy}$, $g: \overbrace{\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{>0} \cup \mathbb{R}_{<0}\times\mathbb{R}_{<0}}^{\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$,

unter NB $f(x,y)=0$ mit $f(x,y)=x^2+4y^2-1$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow \{(x,y);\ x^2+4y^2=1\}$ Ellipse

$g=f_1$ hat lok. Extr. in $N=f_2^{-1}(0)\cap\mathcal{D}$ ⌜NB $x^2+4y^2-1=0$⌟

laut <u>9.4</u> gilt dann dort

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}D_1g & D_2g\\ D_1f & D_2f\end{pmatrix}(a)<2, \text{ also } \operatorname{rg}(\dots)\overset{!}{=}1.$$

Haben

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}D_1g & D_2g\\ D_1f & D_2f\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}\frac12\sqrt{\frac{y}{x}} & \frac12\sqrt{\frac{x}{y}}\\ 2x & 8y\end{pmatrix}<2,$$

wenn $\exists\lambda\in\mathbb{R}: (D_1f,D_2f)(a)=\lambda(D_1g,D_2g)(a)$

$$\iff (2x,8y)=\lambda\left(\tfrac12\sqrt{\tfrac{y}{x}},\tfrac12\sqrt{\tfrac{x}{y}}\right)$$

$$\iff 2\begin{pmatrix}2x\\8y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\sqrt{y/x}\\ \sqrt{x/y}\end{pmatrix} \iff \begin{Bmatrix}\text{I}: & 4x=\lambda\sqrt{y/x}\\ \text{II}: & 4^2y=\lambda\sqrt{x/y}\end{Bmatrix} \begin{matrix}\rightsquigarrow \lambda^2xy=4^2x^4\\ \rightsquigarrow \lambda^2xy=4^4y^4\end{matrix}$$

Es folgt: $4^2x^4=4^4y^4 \iff x^2=4y^2 \iff \underline{x=\pm2y}$.

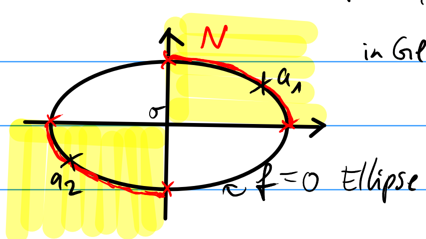
NB mit $x=\pm2y$ gibt: $1=x^2+4y^2=4y^2+4y^2=8y^2 \rightsquigarrow \underline{y=\pm\frac{1}{2\sqrt2}}$,

passendes y dazu ist $x=2y=\pm\frac{1}{\sqrt2}$.

Extrema auf N sind dann bei $a_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{2\sqrt2}\right)$, $a_2=\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{2\sqrt2}\right)$

$\rightsquigarrow$ dort Maximum, Wert $=\sqrt{\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{2\sqrt2}}=\frac12>0$

und Minima auf $(1,0)$, $(0,\frac12)$, $(0,-\frac12)$, $(-1,0)$, Wert $=0$. ⌜<u>Satz 9.4</u> greift dort nicht, da Randpunkte von $\mathcal{D}$⌟



in Gelb: $\mathcal{D}$,

$g:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$, $\binom{x}{y}\mapsto\sqrt{xy}$

9.21. <u>Bsp. mit $\ell=1$, $k=2$:</u> $\quad f:\mathbb{R}^{1+2}\to\mathbb{R}^2,\ (x,(y,z))\mapsto\begin{pmatrix}f_1(x,(y,z))\\ f_2(x,(y,z))\end{pmatrix}$.

1. Gibt es Funktionen $y(x)$, $z(x)$ so, dass $\quad$ [y nahe e definiert, z nahe 1 def.]

$$\left\{\begin{matrix} xyz=e \\ \text{und } xe^z=y\end{matrix}\right\}$$ ist mit $y(1)=e$, $z(1)=1$? $\rightsquigarrow (1,e,1)$ erfüllt Glgn.

2. Was ist deren Abl. in $x=1$?

<u>Zu 1.:</u> Ja laut impl. Fkt.satz. Denn setze $f(x,y,z):=\begin{pmatrix}xyz-e\\ xe^z-y\end{pmatrix}$, $f:\mathbb{R}^{1+2}\to\mathbb{R}^2$.

Haben $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial(y,z)}}_{\text{"}y\text{" im Satz}}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}xz & xy\\ -1 & xe^z\end{pmatrix}\\ \uparrow\ \text{nach } y \quad \uparrow\ \text{nach } z\end{array}$, $\quad \frac{\partial f}{\partial(y,z)}\begin{pmatrix}1\\e\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & e\\ -1 & e\end{pmatrix}$ inv'bar: $\det(")=2e\neq 0$ ✓

$\rightsquigarrow \varphi(x)=\begin{pmatrix}y(x)\\ z(x)\end{pmatrix}$ existiert.

<u>Zu 2.:</u> Abl. ist

$$\begin{pmatrix}y'(x)\\ z'(x)\end{pmatrix}=\varphi'(x)\overset{\text{Satz}}{=}-\left(\frac{\partial f}{\partial(y,z)}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right),$$

also in $x=1$:

$$\begin{pmatrix}y'(1)\\ z'(1)\end{pmatrix}=\varphi'(1)=-\begin{pmatrix}1 & e\\ -1 & e\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}e\\e\end{pmatrix}=-\frac{1}{2e}\begin{pmatrix}e & -e\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e\\e\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e & -e\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}}}.$$

$$\left[\text{denn } \frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}yz\\ e^z\end{pmatrix},\ \frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}1\\e\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e\\e\end{pmatrix}\right]$$

Ergebnis: $y'(1)=0$, $z'(1)=-1$.

9.22. <u>Bsp. mit $\ell=2$, $k=1$:</u> $\quad f:\mathbb{R}^{2+1}\to\mathbb{R}^1,\ (\underbrace{(x,y)}_{x \text{ im Satz}},\overset{y \text{ im Satz}}{z})\mapsto f((x,y),z)$

1. Gibt es Funktion $z=z(x,y)$ so, dass $xy\ln(z)=1$ (nahe $x=1=y$, $z=e$)?

Antwort: Ja nach impl. Fkt.satz, denn betr. $f(x,y,z)=xy\ln(z)-1$,

dann ist $\frac{\partial f}{\partial z}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\frac{xy}{z}$, also $\frac{\partial f}{\partial z}\begin{pmatrix}1\\1\\e\end{pmatrix}=\frac{1}{e}\neq 0$ (inv'bar).

2. Was ist $z'(1,1)$?

Haben $\frac{\partial\varphi}{\partial(x,y)}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=-\frac{\partial f}{\partial z}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^{-1}\cdot\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\left(\frac{xy}{z}\right)^{-1}\cdot\left(y\ln(z),\ x\ln(z)\right)$,

hier speziell $\frac{\partial\varphi}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\underset{z=e}{=}-\underbrace{\left(\frac{1}{e}\right)^{-1}}_{=e}\cdot\left(1\cdot\ln(e),\ 1\cdot\ln(e)\right)=\underline{\underline{(-e,-e)}}.$

Stimmt's? Ja: hier geht die Auflösung explizit ohne Satz, nämlich $\varphi(x,y)=e^{\frac{1}{xy}}$,

und $\varphi'(x,y)=\left(e^{\frac{1}{xy}}\cdot\frac{(-1)}{x^2y},\ e^{\frac{1}{xy}}\cdot\frac{(-1)}{xy^2}\right)$, $\varphi'(1,1)=(-e,-e)$ ✓