Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
SoSe 25

Analysis II

Übungsklausur

Abgabe: Keine Abgabe

Lückentextaufgabe A1 (8 Punkte)

1.1 Seien $a \in \mathbb{R}^n$ und $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dann ist f genau dann in a differenzierbar, wenn alle Komponentenfunktionen in a ____________________ sind.

1.2 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann besitzt jede zweimal stetig differenzierbare Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$, deren Hessematrix in einem kritischen Punkt $a \in D$ ____________________, in a ein lokales Maximum.

1.3 Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\|\cdot\|$ eine Norm auf V und $\varphi : V \to V$ eine Abbildung. Dann ist φ eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $1/4$, wenn ____________________ für alle $x, y \in V$ gilt.

1.4 Die Menge ____________________ ist eine kompakte Teilmenge in $\mathbb{R}$, die nicht zusammenhängend ist.

1.5 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch $M = [0, 2[\times]1, 3[\cup \{(0, 0)\}$. Dann ist der Rand von M gegeben durch ____________________________________.

1.6 Eine Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist genau dann vollständig, wenn ____________________________________.

1.7 Das Taylorpolynom von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 y + 4x^2 y + xy$ vom Grad ≤ 3 im Entwicklungspunkt $a = (0, 0)$ ist gleich ____________________.

1.8 Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes. Dann gilt $\mathring{A} = \overline{A}$ genau dann, wenn ____________________.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = x^3yz^2 + e^{2x}$.

1. Berechnen Sie die Richtungsableitung $\partial_v f(x_0)$ für $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$ und $x_0 = (0, 3, 2)^T$.

2. Bestimmen Sie die Richtung maximaler Steigung von f in x_0, d.h. bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}^3$ mit $\|a\|_2 = 1$ so, dass $D_w f(x_0) \leq D_a f(x_0)$ für alle $w \in \mathbb{R}^2$ mit $\|w\|_2 = 1$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = -x^2 + 2x - y^2 + 9$. Bestimmen Sie die Maxima und Minima von f auf der Kreisscheibe $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Aufgabe 4. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ das Standard-Skalarprodukt und sei $a = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie den Abstand des Nullpunktes $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ zur Tangentialebene der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy + x + y$ im Punkte $p = (a, f(a)) = (1, 1, 3)$.

Aufgabe 5.

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = 1 + x\cos(y)$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f im Entwicklungspunkt $(1, \pi)$.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (\sin(x + y), \exp(xy))$. Zeigen Sie: Es existieren offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(0, \pi) \in U$ und $(0, 1) \in V$ so, dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Berechnen Sie die Ableitung $Df|_U^{-1}$ für die Umkehrfunktion $f|_U^{-1} : V \to U$ von $f|_U$ an der Stelle $(0, 1)$.

Aufgabe 6. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ partiell differenzierbar ist.

2. Ist f stetig in $(0, 0)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Ist f total differenzierbar in $(0, 0)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7.

1. Zeigen Sie, dass $\delta : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}, \delta(x, y) = |\sin(x) - \sin(y)|$ eine Metrik auf $[0, 1]$ ist.

2. Zeigen Sie, dass die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_\infty\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 8.

1. Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y''' - 5y'' = 0$.

2. Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte Lösung $y :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ der linearen Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{x} \cdot y + 2x^2$$

mit Anfangsbedingung $y(1) = 0$.

Aufgabe 9. Sei (R, δ) ein metrischer Raum und seien $A, B \subseteq R$. Beweisen Sie, dass

1. $(A \setminus B)^\circ \subseteq \mathring{A} \setminus \mathring{B}$.

2. $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$.