Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2013/14
18. Oktober 2013
Blatt 1

Übungen zu Analysis III

1. (a) (6 Punkte) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Polynom von 2 Veränderlichen. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

   (b) Wiederholen Sie den Paragraphen über uneigentliche Integrale aus Analysis I.

   (c) (9 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

   Ein wesentliches Ziel der Analysis III ist es, Bedingungen kennenzulernen, unter denen man die Integrationsreihenfolge vertauschen darf.

2. (6 Punkte) Führen Sie detailliert den Beweis von Lemma 1 von §1 der Vorlesung aus, d. h. zeigen Sie: Sind P, Q Quader in $\mathbb{R}^n$, so ist auch $P \cap Q$ ein Quader in $\mathbb{R}^n$.

3. (6 Punkte) Führen Sie detailliert den Beweis von Lemma 2 von §1 der Vorlesung aus, d. h. zeigen Sie: Sind $P, Q \in \mathscr{Q}^n$, so ist $Q \setminus P$ die Vereinigung endlich vieler paarweise disjunkter Elemente von $\mathscr{Q}^n$.

(bitte wenden!)

4. Sei X eine Menge.

   (a) (3 Punkte) Sei R die Menge aller Abbildungen von X in dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit 2 Elementen. Durch punktweise Addition und Multiplikation wird R zu einem kommukativen Ring mit 1 im Sinne der Algebra. Für $A \in \mathscr{P}(X)$ sei $\chi_A \in R$ definiert durch

$$\chi_A(x) :\,= \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A. \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

   Zeigen Sie: Durch $A \mapsto \chi_A$ erhält man eine Bijektion von $\mathscr{P}(X)$ auf R.

   (b) (5 Punkte) Für $A, B \in \mathscr{P}(X)$ definiert man die *symmetrische Differenz* von A und B durch

$$A \,\Delta\, B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

   Zeigen Sie: Die Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ wird mit den Operationen Δ als Addition und $\cap$ als Multiplikation zu einem zu R isomorphen kommutativen Ring mit 1.

   (c) (5 Punkte) Zeigen Sie: Eine Teilmenge $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ist genau dann ein Ring von Teilmengen von X im Sinne von §1 der Vorlesung, wenn $\mathscr{R}$ ein Unterring des Ringes $(\mathscr{P}(X), \Delta, \cap)$ ist; dabei muss ein Unterring nicht notwendig die 1 enthalten.

Abgabe: Freitag, den 25. Oktober 2013, 10:20 Uhr