Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2013/14
20. Dezember 2013
Blatt 10

Übungen zu Analysis III

41. (10 Punkte) Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$.

   (a) Sei $\mathscr{U}$ die Menge aller Abbildungen $\varphi : U \to V$, wobei gilt: U und V sind offen in $\mathbb{R}^N$ und $\varphi : U \to V$ ist ein Diffeomorphismus mit
   $$\varphi(M \cap U) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap V.$$
   Zeigen Sie: In $\mathscr{U}$ gibt es eine Folge $(\varphi_i : U_i \to V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. (Dies geht ähnlich wie §10, Satz 4, ist aber leichter.)

   (b) Zeigen Sie: Ist $n < N$, so ist $\lambda^N(M) = 0$.

42. (3+3+6 Punkte) Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$ und N eine h-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

   (a) Zeigen Sie direkt mit der Definition einer Untermannigfaltigkeit, dass $M \times N$ eine $(k+h)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+m}$ ist.

   (b) Zeigen Sie, wie man aus einer Karte von M und einer Karte von N eine Karte von $M \times N$ gewinnen kann.

   (c) Zeigen Sie: Die Untermannigfaltigkeit $S^1 \times S^1$ von $\mathbb{R}^4$ ist homöomorph zum Torus.

(bitte wenden!)

43. (9 Punkte) Vervollständigen Sie den Beweis von §11, Satz 5, d.h. zeigen Sie detailliert für eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^N$:

   (a) M ist genau dann zusammenhängend, wenn M wegzusammenhängend ist.

   (b) Die Zusammenhangskomponenten von M sind offen in M.

   (c) Die Zusammenhangskomponenten von M sind n-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^N$.

44. (9 Punkte) Sei $Y := \left\{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R}_{>0}\right\}$ und $X := Y \cup \left\{(0,0)\right\}$. Zeigen Sie:

   (a) Y ist wegzusammenhängend.

   (b) X ist zusammenhängend.

   (c) X ist nicht wegzusammenhängend.

Abgabe: Freitag, den 10. Januar 2014, 10:20 Uhr