Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2013/14
10. Januar 2014
Blatt 11

Übungen zu Analysis III

Hinweis für die Mathematikstudierenden: Durch Lösen dieses Übungsblattes können Sie die 3 Creditpoints für das Analysis-Tutorium erhalten. Hierzu müssen Sie mindestens 40 % der Punkte erreichen und deutlich „Tutoriumsblatt“ auf Ihre Abgabe schreiben.

45. (9 Punkte) Wir betrachten den Zylinder

$$Z := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass Z eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Berechnen Sie in jedem Punkt von Z den Tangentialraum.

(c) Bestimmen Sie ein Einheitsnormalenfeld auf Z.

46. (7 Punkte) Wir betrachten die Hyperfläche S^{n-1} von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $S_-^{n-1} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1} \mid x_n \leq 0\}$ ist eine $(n-1)$-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit mit Rand von S^{n-1} und

$$\partial S_-^{n-1} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1} \mid x_n = 0\right\} = S^{n-2} \times \{0\}.$$

47. (5 Punkte) Zeigen Sie: Sind A, B kompakte Teilmengen eines metrischen Raumes X, so ist $A \cup B$ kompakt.

(bitte wenden!)

48. (9 Punkte) Sei C der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit der Norm
$$||f|| := \max\{|\,f(x)\,|\ \mid\ 0 \leq x \leq 2\pi\}\,.$$
Wir definieren $f_n \in C$ durch $f_n(x) := \sin(2^n x)$. Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) in C keine konvergente Teilfolge besitzt und folgern Sie, dass die Einheitskugel
$$B := \{f \in C\ \mid\ ||f|| \leq 1\}$$
nicht kompakt ist.

49. (10 Punkte) Sei X ein kompakter metrischer Raum und sei $\{A_i \,|\, i \in \Lambda\}$ eine Überdeckung von X durch offene Mengen. Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass jede Kugel vom Radius ε in wenigstens einer der Mengen A_i enthalten ist.

Abgabe: Freitag, den 17. Januar 2014, 10:20 Uhr