Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2013/14
17. Januar 2014
Blatt 12

Übungen zu Analysis III

50. (3+4+3+2+1+1 Punkte) Sei $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2(y-z)^2 = x\}$.

    (a) Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

    (b) Sei $a := (4,2,1) \in M$. Geben Sie Basen des Tangentialraums $T_a(M)$ und des Normalenraums $N_a(M)$. an

    (c) Für $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Ebene

    $$E_t := \{(t,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}.$$

    Für welche t ist $E_t \cap M$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$?

    (d) Zeigen Sie, dass M orientierbar ist.

    (e) Ist M zusammenhängend?

    (f) Ist M kompakt?

51. (13 Punkte) Wir betrachten den Doppelkegel

    $$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}.$$

    Zeigen Sie, dass $M := D \setminus \{(0,0,0)\}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist und berechnen Sie in jedem Punkt von M den Tangentialraum und den Normalenraum. Warum ist D keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$?

52. (4 Punkte) Sei X ein lokalkompakter metrischer Raum, sei $a \in X$ und U eine Umgebung von a in X. Zeigen Sie, dass es eine kompakte Umgebung K von a gibt, die in U enthalten ist.

(bitte wenden!)

53. (6 Punkte) Sei $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $p(x, y) := x$. Zeigen Sie:

    (a) Ist A eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, so ist $p(A)$ offen in $\mathbb{R}$.

    (b) Ist A eine lokalkompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, so ist $p(A)$ lokalkompakt.

54. (3 Punkte) Finden Sie eine lokalkompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$, deren Komplement nicht lokalkompakt ist.

Abgabe: Freitag, den 24. Januar 2014, 10:20 Uhr