Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PROF. DR. W. SINGHOF

WS 2013/14
24. Januar 2014
Blatt 13

Übungen zu Analysis III

55. (12 Punkte) Wir betrachten die Hyperbelfunktionen

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right),\ \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Sei ω die Differentialform auf $\mathbb{R}^3$, die gegeben ist durch

$$\omega(x, y, z) = \sinh x \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + y \cosh y \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

(a) Berechnen Sie $x\,\mathrm{d}x \wedge \omega$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{d}\omega$.

(c) Finden Sie eine C^∞-Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{d}(f\mathrm{d}z) = \omega$.

56. (8 Punkte) Sei ω die die Differentialform auf $\mathbb{R}^3$, die gegeben ist durch

$$\omega(x, y, z) = xy^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + xyz\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + xy\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

(a) Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\varphi(x, y) := (x, y, y).$$

Berechnen Sie $\varphi^*(\omega)$.

(b) Sei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ glatt. Berechnen Sie $\psi^*(\omega)$.

(bitte wenden!)

57. (10 Punkte) Führen Sie den Beweis von Bemerkung 6 von §16 aus, d. h. zeigen Sie, dass die äußere Ableitung von Differentialformen eine Verallgemeinerung der Differentialoperatoren grad, rot und div ist.

58. (10 Punkte) Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und ω eine glatte k-Form auf U. Mit $\mathrm{Supp}(\omega)$ bezeichnen wir den Abschluss der Menge

$$\{x \in U \mid \omega(x) \neq 0\}$$

in U. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Supp}(d\omega) \subseteq \mathrm{Supp}(\omega).$$

Abgabe: Freitag, den 31. Januar 2014, 10:20 Uhr