Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2013/14
25. Oktober 2013
Blatt 2

Übungen zu Analysis III

5. (15 Punkte) Sei $X = \{1, 2, 3\}$.

   (a) Bestimmen Sie alle Ringe von Teilmengen von X. Wie viele gibt es?

   (b) Bestimmen Sie alle σ-Algebren in X. Wie viele gibt es?

   (c) Wir nennen zwei Ringe $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ von Teilmengen von X äquivalent, wenn es eine Bijektion $\beta : X \to X$ gibt mit $\mathscr{B} = \{\beta(A) \mid A \in \mathscr{A}\}$. Wie viele Äquivalenzklassen von Ringen von Teilmengen gibt es?

   (d) Wie viele Äquivalenzklassen von σ-Algebren in X gibt es?

   (e) Wählen Sie aus jeder Äquivalenzklasse von σ-Algebren in X eine σ-Algebra $\mathscr{A}$ aus und bestimmen Sie alle Maße μ auf $\mathscr{A}$ mit den beiden folgenden Eigenschaften:
   - $\mu(X) = 1$.
   - $\mu(A) \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} \quad \forall A \in \mathscr{A}$.

6. (12 Punkte) Sei X eine Menge und $\mathscr{R}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von X.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{R}$ ein Ring von Teilmengen von X ist.

   (b) Für welche Mengen X ist $\mathscr{R}$ eine σ-Algebra in X?

   (c) Definiert man $\mu\colon \mathscr{R} \to [0, \infty]$ durch
   $$\mu(A) \colon = \text{Anzahl der Elemente von } A,$$
   so ist μ ein Prämaß auf $\mathscr{R}$.

(bitte wenden!)

7. (6 Punkte) Sei X eine Menge, $\mathscr{R}$ ein Ring von Teilmengen von X und $x \in X$. Sei $\varepsilon_x \colon \mathscr{R} \to [0, \infty]$ gegeben durch

$$\varepsilon_x(A) \colon = \begin{cases} 1\ , & \text{falls } x \in A\ , \\ 0\ , & \text{falls } x \notin A\ . \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass ε_x ein Prämaß auf $\mathscr{R}$ ist. Es heißt **Dirac-Prämaß** auf $\mathscr{R}$.

8. (10 Punkte) Sei $X := [0, 1]$. Zeigen Sie: Es gibt kein Maß μ auf $\mathscr{P}(X)$ mit $\mu(X) = 1$, das nur die Werte 0 und 1 annimmt und das allen einelementigen Teilmengen von X den Wert 0 zuordnet.
(Tipp: Fortgesetzte Halbierung des Intervalles X.)

Abgabe: Donnerstag, den 31. Oktober 2013, 16:00 Uhr