Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2013/14
31. Oktober 2013
Blatt 3

Übungen zu Analysis III

9. (7 Punkte) Seien X, Y Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in X. Zeigen Sie, dass $\mathscr{A}_f := \{B \in \mathscr{P}(Y) \mid f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ eine σ-Algebra in Y ist.

10. (a) (3 Punkte) Sei X eine Menge und A eine Teilmenge von X, die von $\emptyset$ und X verschieden ist. Wieviele Elemente enthält $\boldsymbol{\sigma}(\{A\})$? (Es reicht, wenn Sie diese Elemente angeben.)

    (b) (7 Punkte) Sei $\mathscr{R}$ der Ring der endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\mathbb{R}_{>0} \notin \boldsymbol{\sigma}(\mathscr{R})$.

In den beiden folgenden Aufgaben benutzen wir folgende Definition: Ein Maßraum $(X, \mathscr{A}, \mu)$ heißt **vollständig**, wenn gilt: Ist $A \in \mathscr{A}$ mit $\mu(A) = 0$ und ist $B \subseteq A$, so ist $B \in \mathscr{A}$.

11. Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und

$$\mathscr{N} := \{B \in \mathscr{P}(X) \mid \text{es gibt ein } D \in \mathscr{A} \text{ mit } \mu(D) = 0 \text{ und } B \subseteq D\},$$
$$\widehat{\mathscr{A}} := \{C \in \mathscr{P}(X) \mid \text{es gibt ein } A \in \mathscr{A} \text{ und ein } B \in \mathscr{N} \text{ mit } C = A \cup B\}.$$

Zeigen Sie:

(a) (6 Punkte) $\widehat{\mathscr{A}}$ ist eine σ-Algebra in X.

(b) (3 Punkte) Ist $C \in \widehat{\mathscr{A}}$ mit $C = A \cup B$ und $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{N}$, so erhält man durch

$$\widehat{\mu}(C) := \mu(A)$$

eine wohldefinierte Abbildung $\widehat{\mu} : \widehat{\mathscr{A}} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(c) (3 Punkte) Die in (b) definierte Abbildung $\widehat{\mu}$ ist ein Maß auf $\widehat{\mathscr{A}}$.

(d) (3 Punkte) Der Maßraum $(X, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{\mu})$ ist vollständig.

(bitte wenden!)

12. Sei X eine Menge, μ^* ein äußeres Maß auf X und $\mathscr{R}^*$ die Menge aller μ^*-messbaren Teilmengen von X. Zeigen Sie:

    (a) (5 Punkte) Ist $A \subseteq X$ mit $\mu^*(A) = 0$, so ist $A \in \mathscr{R}^*$.

    (b) (3 Punkte) Der Maßraum $(X, \mathscr{R}^*, \mu^*|\mathscr{R}^*)$ ist vollständig.

Abgabe: Freitag, den 8. November 2013, 10:20 Uhr