Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2013/14
22. November 2013
Blatt 6

Übungen zu Analysis III

22. (13 Punkte) Beantworten Sie für die folgenden Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jeweils die folgenden Fragen:

    1) Ist f Riemann-integrierbar?

    2) Ist f Lebesgue-integrierbar? Wenn ja, was ist $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{dx}$?

(a) $f(x) :=\begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(b) $f(x) :=\begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(c) $f(x) :=\begin{cases} 1, & \text{falls } x = \frac{1}{n} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(d) $f(x) :=\begin{cases} n, & \text{falls } x = \frac{1}{n} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(e) $f(x) :=\begin{cases} 2^{n/2}, & \text{falls } \dfrac{1}{2^n} \leq x < \dfrac{1}{2^{n-1}} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{falls } x \in \{0,1\}\,. \end{cases}$

(f) $f(x) :=\begin{cases} -\dfrac{(-2)^n}{n}, & \text{falls } \dfrac{1}{2^n} \leq x < \dfrac{1}{2^{n-1}} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{falls } x \in \{0,1\}\,. \end{cases}$

    Warum darf man $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{dx} = \log 2$ schreiben ?

(bitte wenden!)

23. (7 Punkte) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir $f_\alpha : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ durch $f_\alpha(x) := x^\alpha$. Zeigen Sie, dass f_α genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn $\alpha < -1$.

24. (12 Punkte)

   (a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(t)\colon = \int_0^\infty e^{-tx} \cdot \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x.$$

   (b) Zeigen Sie, dass $f(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$.

   (c) Folgern Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ den Wert $\frac{\pi}{2}$ hat.

25. (8 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Zeigen Sie: Für λ^1-fast alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{n \to \infty} f(x + n) = 0$.

Abgabe: Freitag, den 29. November 2013, 10:20 Uhr