Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2013/14
29. November 2013
Blatt 7

Übungen zu Analysis III

26. (5 Punkte) Führen Sie die in der Vorlesung skizzierte Berechnung des Volumens $\lambda^n(B_{n,r})$ der Kugel

$$B_{n,r} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq r^2 \right\}$$

detailliert aus.

27. (10 Punkte) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und $h > 0$, sei sei $C_h(A)$ der Kegel mit Basis A und Höhe h, also

$$C_h(A) := \left\{ ((1-t)x, th) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \,|\, x \in A,\, 0 \leq t \leq 1 \right\}.$$

Zeigen Sie: Ist $A \in \mathscr{B}^{n-1}$, so ist $C_h(A) \in \mathscr{B}^n$ und

$$\lambda^n(C_h(A)) = \frac{h}{n}\,\lambda^{n-1}(A).$$

28. (8 Punkte) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := x^2 + y^2$. Berechnen Sie $\int\limits_B f \mathrm{d}\lambda^2$ für die folgenden Teilmengen B von $\mathbb{R}^2$:

   (a) $B = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ und } x + y \leq 1\}$.

   (b) $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(bitte wenden!)

29. (6 Punkte) Sei f eine messbare nicht-negative numerische Funktion auf $\mathbb{R}^N$, wobei $N = n + m$. Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 3 von §7, indem Sie zeigen: Die numerische Funktion

$$y \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y) d\lambda^n(x)$$

auf $\mathbb{R}^m$ ist messbar.

30. (5 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie:

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^x f(x,y) dy\, dx = \int\limits_a^b \int\limits_y^b f(x,y) dx\, dy.$$

31. (6 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips das Volumen eines sphärischen Rings, der als Restkörper übrig bleibt, wenn man in eine Kugel ein zylindrisches Loch bohrt, so dass die Zylinderachse durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Alle sphärischen Ringe gleicher Höhe haben gleiches Volumen (unabhängig von den Radien der Kugel und des Zylinders).

Abgabe: Freitag, den 6. Dezember 2013, 10:20 Uhr