Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2013/14
6. Dezember 2013
Blatt 8

Übungen zu Analysis III

32. (8 Punkte) Sei $S^{n-1} := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$. Zeigen Sie, dass $\lambda^n(S^{n-1}) = 0$.

33. (8 Punkte) Zeigen Sie, dass von den beiden Räumen $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ und $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ keiner in dem jeweils anderen enthalten ist.

34. (12 Punkte)

    (a) (**Zylinderkoordinaten**) Sei φ: $[0, \infty[\times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch
    $$\varphi(r, t, z) :\ = (r \cos t, r \sin t, z).$$
    Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist die Abbildung
    $$(r, t, z) \mapsto f(\varphi(r, t, z)) \cdot r$$
    auf $[0, \infty[\times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ integrierbar, und es gilt:
    $$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x) \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} f(\varphi(r, t, z)) \cdot r \ \mathrm{d}r \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z.$$

(bitte wenden!)

(b) (**Kugelkoordinaten**) Sei $\Phi\colon [0,\infty[\, \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) := (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta).$$

Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist die Abbildung

$$(r,\vartheta,\varphi) \mapsto f(\Phi(r,\vartheta,\varphi)) \cdot r^2 \sin\vartheta$$

auf $[0,\infty[\, \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$ integrierbar, und es gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} f(\Phi(r,\vartheta,\varphi)) \cdot r^2 \, \sin\vartheta \;\, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}r.$$

35. (12 Punkte) Für $t > 0$ sei

$$\begin{aligned} F(t) \;&:=\; \int\limits_0^\infty e^{-tx^2} \cos(x^2)\mathrm{d}x, \\ G(t) \;&:=\; \int\limits_0^\infty e^{-tx^2} \sin(x^2)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit der Methode aus §8, dass

$$F(t)^2 - G(t)^2 = \frac{\pi}{4}\frac{t}{1+t^2}, \quad 2F(t)G(t) = F(t)G(t) + G(t)F(t) = \frac{\pi}{4}\frac{1}{1+t^2}.$$

Bestimmen Sie daraus $F(t)$ und $G(t)$ und folgern Sie

$$\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

(Diese uneigentlichen Integrale heißen **Fresnelsche Integrale**.)

Abgabe: Freitag, den 13. Dezember 2013, 10:20 Uhr